АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО - КАВКАЗСКИЙ АКАДЕМИЧЕСКИЙ МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»
(АНО ПО «СКАМК»)

УТВЕРЖДАЮ
Директор АНО ПО «СКАМК»
______________ З.Р. Кочкарова
«15» мая 2023 года

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

для обучающихся по выполнению практических занятий и самостоятельной работы по учебной дисциплине

ЕН.03 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Специальность
09.02.07 Информационные системы и программирование

Программа подготовки
базовая

Форма обучения
очная

г. Ставрополь, 2023

Настоящие методические рекомендации составлены в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование, утвержденные приказом Министерства образования и науки РФ от 09.12.2016 г. № 1547 и примерной образовательной программой, зарегистрированной в государственном реестре от 11.05.2017 г. № 09.02.07-170511.

Методические рекомендации предназначены для обучающихся по выполнению практических занятий и самостоятельной работы по учебной дисциплине ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

Организация – разработчик: Автономная некоммерческая организация профессионального образования «Северо-Кавказский академический многопрофильный колледж», город Ставрополь.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ студентов при изучении учебной дисциплины ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика предназначены для студентов специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

Цель методических указаний: оказание помощи студентам в выполнении практической работы по ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистики.

Настоящие методические указания содержат работы, которые позволят студентам применить на практике свои знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю подготовки, опытом творческой и исследовательской деятельности, и направлены на формирование следующих компетенций:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам

ОК 2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 4. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами

ОК 5. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК 9. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности

ОК 10. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языке.

В результате выполнения практических работ ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика студенты должны расширить свои знания по основным разделам дисциплины путем поиска, овладеть навыками сбора, обработки, анализа и систематизации экономической информации, а также определять состав материальных, трудовых и финансовых ресурсов организации.

По учебному плану на практические занятия предусмотрено 22 аудиторных часов, обучающиеся должны выполнить 10 работ.

1.ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Наименование темы	**Кол-во часов (очная форма обучения (с применением дистанционных технологий))**	
	Наименование	Кол-во часов
Практическая работа: № 1 «Решение задач на расчёт количества выборок»	Устный выборочный опрос по теме. Решение тестовых заданий. Решение задач.	1
Практическая работа № 2 «Решение задач с использованием правила суммы, правила произведения»	Устный выборочный опрос по теме. Решение тестовых заданий. Решение задач.	2
Практическая работа № 3 «Вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности»	Решение тестовых заданий. Решение задач.	2
Практическая работа № 4 «Вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности»	Решение тестовых заданий. Устный выборочный опрос по теме. Решение задач	2
Практическая работа № 5 «Вычисление вероятностей событий в схеме Бернулли»	Решение тестовых заданий. Устный опрос по теме. Решение задач.	2
Практическая работа № 6 «Вычисление вероятности по формуле Байеса Контрольная работа»	Решение задач.	1
Практическая работа № 7 «Решение задач на запись распределения ДСВ»	Решение тестовых заданий. Устный опрос по теме. Решение задач.	2
Практическая работа № 8 «Решение задач на вычисление характеристик ДСВ»	Решение тестовых заданий. Устный опрос по теме. Решение задач.	1
Практическая работа № 9 «Вычисление вероятностей и нахождение характеристик для НСВ с помощью функции плотности и интегральной функции распределения»	Решение тестовых заданий. Устный опрос по теме. Решение задач.	1
Практическая работа № 10 «Вычисление вероятностей для нормально распределенной величины; вычисление вероятностей и нахождение характеристик для показательно распределенной величины»	Решение тестовых заданий. Устный опрос по теме. Решение задач.	2
Практическая работа № 11 «Примеры вычисления пределов»	Решение тестовых заданий. Устный опрос по теме. Решение задач.	2
Практическая работа № 12 «Расчет характеристик НСВ». Контрольная работа	Решение тестовых заданий. Устный опрос по теме. Решение задач.	1

Практическая работа № 13 «Решение задач на центральную предельную теорему»	Решение тестовых заданий. Устный опрос по теме. Решение задач.	1
Всего		22

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

Тема: Решение задач на расчёт количества выборок
Дисциплина: ЕН. 03 Теория вероятностей и математическая статистика

Цель практической работы:

Решение задач на расчет выборок, с применением элементов и формул комбинаторики.

Развитие практических навыков решения комбинаторных задач. Развитие самостоятельной мыслительной деятельности, вычислительных навыков, творческого мышления студентов.

Задачи практической работы:

1.Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2.Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.
3.Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий
Решение задач у доски

1. В ювелирную мастерскую привезли 6 изумрудов, 9 алмазов и 7 сапфиров. Ювелиру заказали браслет, в котором 3 изумруда, 5 алмазов и 2 сапфиров. Сколькими способами он может выбрать камни на браслет?
2. Пете на день рождения подарили 7 новых дисков с играми, а Вале папа привез 9 дисков из командировки. Сколькими способами они могут обменять 4 любых диска одного на 4 диска другого?
3. Группа из двадцати юношей разделяется на три группы, в первую из которых входят три человека, во вторую — пять и в третью — двенадцать. Сколькими способами они могут это сделать?
4. В шахматном кружке 12 юношей и 8 девушек. Для участия в соревнованиях из них нужно составить команду, в которую должны войти 9 юношей и 3 девушки. Сколькими способами это можно сделать?

Индивидуальное задание.

1 вариант

1. В ящике 7 болтов и 15 винтиков разных размеров. Нужно подобрать два болта и три винтика. Сколькими вариантами это можно сделать?
2. Из 4 первокурсников, 5 второкурсников и 6 третьекурсников надо выбрать 3 студента на конференцию. Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если среди выбранных должны быть студенты разных курсов?
3. Сколько существует способов поставить на книжную полку в беспорядке собрание сочинений, состоящее из семи томов?

2 вариант

1. В школе олимпийского резерва обучаются 12 лыжников и 15 конькобежцев. Сколько существует способов сформировать из них команду на соревнования по зимним видам спорта, в которую должны войти три лыжника и четыре конькобежца?
2. Сколькими способами можно распределить 15 выпускников по трём районам, если в одном из них имеется 8, в другом -5 и в третьем – 2 вакантных места?
3. В электричке 12 вагонов. Сколько существует способов размещения 4 пассажиров, если в вагоне должно быть не более одного пассажира?

3 вариант

1. В ящике 20 шаров, среди которых 12 белых, остальные голубые. Сколькими способами из них можно выбрать 3 белых и два голубых шара.
2. Из 15 красных и 7 белых гладиолусов формируются букеты. Сколькими способами можно составить букеты из четырёх красных и трёх белых гладиолусов?
3. Сколько различных спортивных прогнозов могут дать болельщики перед началом первенства по футболу, если в высшей лиге участвуют 15 команд и разыгрывается три медали: золотая, серебряная, бронзовая?

4 вариант

1. В группе 20 юношей и 10 девушек. Сколькими способами можно выбрать трёх юношей и двух девушек для участия в слёте студентов?
2. Компания имеет четыре отдела: производственный, снабжения, менеджмента и маркетинга. Количество людей в отделах 25, 36, 24 и 15 соответственно. Каждый отдел собирается послать одного представителя на ежегодную встречу с директором. Сколько различных групп можно составить из числа работников компании?
3. По сведения геологоразведки, один из 12 участков земли может содержать нефть. Однако компания имеет средства для бурения только семи скважин. Сколько способов отбора для бурения имеется у компании?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Тема: Решение задач с использованием правила суммы, правила произведения
Дисциплина: ЕН. 03 Теория вероятностей и математическая статистика

Цель практической работы:

Учить решать задачи с использованием правила суммы, правила произведения

Задачи практической работы:

1.Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2.Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.
3.Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Данные правила весьма напоминают алгебру событий.

1) Знак «плюс» следует понимать и читать как союз **ИЛИ**.

Задача 1

Студенческая группа состоит из 23 человек, среди которых 10 юношей и 13 девушек. Сколькими способами можно выбрать двух человек одного пола?

Решение: в данном случае подсчёт C_{23}^2 не годится, поскольку общее количество сочетаний включает в себя и разнополые пары.

Условие «выбрать двух человек одного пола» подразумевает, что необходимо выбрать двух юношей **или** двух девушек, и уже сама словесная формулировка указывает на верный путь решения:

$C_{10}^2 = \frac{10!}{8!\cdot 2!} = \frac{8!\cdot 9\cdot 10}{8!\cdot 2!} = \frac{9\cdot 10}{2} = 45$ способами можно выбрать 2 юношей;

$C_{13}^2 = \frac{13!}{11!\cdot 2!} = \frac{11!\cdot 12\cdot 13}{11!\cdot 2!} = \frac{12\cdot 13}{2} = 78$ способами можно выбрать 2 девушек.

Таким образом, двух человек одного пола (без разницы – юношей **или** девушек) можно выбрать: $C_{10}^2 + C_{13}^2 = 45 + 78 = 123$ способами.

Ответ: 123

Правило умножения комбинаций:

2) <u>Знак «умножить» следует понимать и читать как союз **И**</u>.

Рассмотрим ту же студенческую группу, которая пошла на танцы. Сколькими способами можно составить пару из юноши и девушки?

$C_{10}^1 = 10$ способами можно выбрать 1 юношу;

$C_{13}^1 = 13$ способами можно выбрать 1 девушку.

Таким образом, одного юношу **и** одну девушку можно выбрать: $C_{10}^1 \cdot C_{13}^1 = 10\cdot 13 = 130$ способами.

Когда из каждого множества выбирается по 1 объекту, то справедлив следующий принцип подсчёта комбинаций: «**каждый** объект из одного множества может составить пару **с каждым** объектом другого множества».

То есть, Олег может пригласить на танец любую из 13 девушек, Евгений – тоже любую из тринадцати, и аналогичный выбор есть у остальных молодых людей.

Итого: $10\cdot 13 = 130$ возможных пар.

Следует отметить, что в данном примере не имеет значения «история» образования пары; однако если принять во внимание инициативу, то количество комбинаций нужно удвоить, поскольку каждая из 13 девушек тоже может пригласить на танец любого юношу. Всё зависит от условия той или иной задачи!

Похожий принцип справедлив и для более сложных комбинаций, например: сколькими способами можно выбрать двух юношей **и** двух девушек для участия в сценке КВН?

Союз **И** недвусмысленно намекает, что комбинации необходимо перемножить:

$C_{10}^2 \cdot C_{13}^2 = 45\cdot 78 = 3510$ возможных групп артистов.

Иными словами, **каждая** пара юношей (45 уникальных пар) может выступать с **любой** парой девушек (78 уникальных пар). А если рассмотреть распределение ролей между участниками, то комбинаций будет ещё больше. …

Правило умножения комбинаций распространяется и на большее количество множителей:

Задача 2

Сколько существует трёхзначных чисел, которые делятся на 5?

Решение: для наглядности обозначим данное число тремя звёздочками: *******

Комбинации будем считать по разрядам – *слева направо*:

В *разряд сотен* можно записать любую из $C_9^1 = 9$ цифр (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9). Ноль не годится, так как в этом случае число перестаёт быть трёхзначным.

А вот в *разряд десятков* («посерединке») можно выбрать любую из 10 цифр: $C_{10}^1 = 10$.
По условию, число должно делиться на 5. Число делится на 5, если оно заканчивается на 5 либо на 0. Таким образом, в младшем разряде нас устраивают 2 цифры.

Итого, существует: $C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot 2 = 9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$ трёхзначных чисел, которые делятся на 5.

При этом произведение $C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot 2$ расшифровывается так: «9 способами можно выбрать цифру в *разряд сотен* **и** 10 способами выбрать цифру в *разряд десятков* **и** 2 способами в *разряд единиц*»
Или ещё проще: «**каждая** из 9 цифр в *разряде сотен* комбинируется **с каждой** из 10 цифр *разряда десятков* **и с каждой** из двух цифр в *разряде единиц*».
Ответ: 180
Задача 3
Сколько существует выигрышных комбинаций из 2 карт при игре в «очко»?
Решение*:*
$C_4^1 \cdot C_4^1 = 4 \cdot 4 = 16$ способами может быть сдана десятка и туз («каждая десятка с каждым тузом»);
$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$ способами может быть сдана пара тузов.
Итого: $C_4^1 \cdot C_4^1 + C_4^2 = 16 + 6 = 22$ выигрышные комбинации.
Ответ: 22
Задача 4
У Васи дома живут 4 кота.
а) сколькими способами можно рассадить котов по углам комнаты?
б) сколькими способами можно отпустить гулять котов?
в) сколькими способами Вася может взять на руки двух котов (одного на левую, другого – на правую)?
Решение: во-первых, вновь следует обратить внимание на то, что в задаче речь идёт о **разных** объектах (даже если коты – однояйцовые близнецы).
а) ~~Молчание котов~~. Данной экзекуции подвергаются **сразу все коты** + важно их расположение, поэтому здесь имеют место перестановки:
$P_4 = 4! = 24$ способами можно рассадить котов по углам комнаты.
При перестановках имеет значение лишь количество различных объектов и их взаимное расположение. В зависимости от настроения Вася может рассаживать животных полукругом на диване, в ряд на подоконнике и т.д. – перестановок во всех случаях будет 24. Желающие могут для удобства представить, что коты разноцветные (например, белый, чёрный, рыжий и полосатый) и перечислить все возможные комбинации.
б) Сколькими способами можно отпустить гулять котов?
Предполагается, что коты ходят гулять только через дверь, при этом вопрос подразумевает безразличие по поводу количества животных – на прогулку могут выйти 1, 2, 3 или все 4 кота.
Считаем все возможные комбинации:
$C_4^1 = 4$ способами можно отпустить гулять одного кота (любого из четырёх);
$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$ способами можно отпустить гулять двух котов (варианты

перечислите самостоятельно);

$C_4^3 = 4$ способами можно отпустить гулять трёх котов (какой-то один из четырёх сидит дома);

$C_4^4 = 1$ способом можно выпустить всех котов.

Наверное, вы догадались, что полученные значения следует просуммировать:

$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$ способами можно отпустить гулять котов.

Энтузиастам предлагаю усложнённую версию задачи – когда любой кот в любой выборке случайным образом может выйти на улицу, как через дверь, так и через окно ~~10 этажа~~. Комбинаций заметно прибавится!

в) Сколькими способами Вася может взять на руки двух котов?

Ситуация предполагает не только выбор 2 животных, но и их размещение по рукам:

$A_4^2 = 3 \cdot 4 = 12$ способами можно взять на руки 2 котов.

Второй вариант решения: $C_4^2 = 6$ способами можно выбрать двух котов **и** $P_2 = 2! = 2$ способами посадить **каждую** пару на руки: $C_4^2 \cdot P_2 = 6 \cdot 2 = 12$

Ответ: а) 24, б) 15, в) 12

Задача 5

В лифт 12-этажного дома сели 3 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со 2-го) этаже. Сколькими способами:

1) пассажиры могут выйти на одном и том же этаже *(порядок выхода не имеет значения)*;

2) два человека могут выйти на одном этаже, а третий – на другом;

3) люди могут выйти на разных этажах;

4) пассажиры могут выйти из лифта?

Решение:

1) $C_{11}^1 = 11$ способами можно выбрать этаж для выхода всех пассажиров.

2) $C_{11}^2 = \frac{11!}{9! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$ способами можно выбрать 2 этажа для выхода пассажиров (например, 6-й и 11-й этаж).

$C_3^2 = 3$ способами можно выбрать двух человек для выхода на одном этаже (третий выйдет на другом этаже). Например:

6 этаж / 11 этаж

Таня + Надя / Люся

Таня + Люся / Надя

Надя + Люся / Таня

Кроме того, любую пару и «одинокого человека» можно поменять этажами:

11 этаж / 6 этаж

Таня + Надя / Люся

Таня + Люся / Надя

Надя + Люся / Таня

Таким образом, для каждой пары этажей (55 уникальных сочетаний) возможно $C_3^2 \cdot P_2 = A_3^2 = 6$ способов выхода пассажиров.

По правилу умножения комбинаций: $C_{11}^2 \cdot A_3^2 = 55 \cdot 6 = 330$ способами 2 пассажира могут выйти на одном этаже, а третий – на другом этаже.

3) $A_{11}^3 = 9 \cdot 10 \cdot 11 = 990$ способами пассажиры могут выйти на разных этажах.

Второй вариант решения: $C_{11}^3 = \frac{11!}{8! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{6} = 165$ способами можно выбрать 3 этажа для выхода и $P_3 = 3! = 6$ способами переставить пассажиров по каждойтройке этажей; следовательно, пассажиры могут выйти на разных этажах $C_{11}^3 \cdot P_3 = 165 \cdot 6 = 990$ способами.

4) Способ первый: суммируем комбинации первых трёх пунктов:

$C_{11}^1 + C_{11}^2 \cdot A_3^2 + A_{11}^3 = 11 + 330 + 990 = 1331$ способом пассажиры могут выйти из лифта.

Способ второй: в общем случае он более рационален, более того, позволяет обойтись без результатов предыдущих пунктов. Рассуждения таковы: $C_{11}^1 = 11$ способами может выйти 1-й пассажир из лифта и $C_{11}^1 = 11$ способами может выйти 2-й пассажир и $C_{11}^1 = 11$ способами может выйти 3-й пассажир. По правилу умножения комбинаций: $C_{11}^1 \cdot C_{11}^1 \cdot C_{11}^1 = 11 \cdot 11 \cdot 11 = 11^3 = 1331$ способом могут выйти три человека

Ответ: 1) 11; 2) 330; 3) 990; 4) 1331

Задача 6

Студенческая группа состоит из 23 человек, среди которых 10 юношей и 13 девушек. Сколькими способами можно выбрать двух человек одного пола?

Решение: в данном случае подсчёт C_{23}^2 не годится, поскольку общее количество сочетаний включает в себя и разнополые пары.

Условие «выбрать двух человек одного пола» подразумевает, что необходимо выбрать двух юношей **или** двух девушек, и уже сама словесная формулировка указывает на верный путь решения:

$C_{10}^2 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ способами можно выбрать 2 юношей;

$C_{13}^2 = \frac{13!}{11! \cdot 2!} = \frac{11! \cdot 12 \cdot 13}{11! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$ способами можно выбрать 2 девушек.

Таким образом, двух человек одного пола (без разницы – юношей **или** девушек) можно выбрать: $C_{10}^2 + C_{13}^2 = 45 + 78 = 123$ способами.

Ответ: 123

Задача 7. В магазине «Все для чая» есть 6 разных чашек и 4 разных блюдца. Сколько вариантов чашки и блюдца можно купить?

Решение.

Чашку мы можем выбрать 6-ю способами, а блюдце 4-я способами. Так как нам надо купить пару чашку и блюдце, то это можно сделать 6 · 4 = 24 способами (по правилу произведения).

Ответ: 24.

Задача 8. При встрече каждый из друзей пожал другому руку. Сколько всего было рукопожатий, если встретились 6 друзей?

Решение:

В одном рукопожатии равноправно участвуют два человека. 6 друзей объединялись в группы по 2 без учёта порядка следования. Такие группировки (выборки) называются сочетаниями. Число сочетаний определяем по формуле
$C_6^2 = 6!/2!/(6 - 2)! = 6!/2!/4! = 5{\cdot}6/2 = 15$.
Ответ: 15.
Для успешного решения комбинаторных задач надо еще и правильно выбрать формулу, по которой искать количество нужных соединений. В этом поможет следующая схема:


Задача 9. Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе повторяться не могут.
Решение.
Для выбора формулы выясняем, что для чисел, которые мы будем составлять, порядок учитывается и не все элементы одновременно выбираются. Значит, это соединение – размещение из 7 элементов по 3. Воспользуемся формулой для числа размещений: А73 = 7(7 – 1)(7 – 2) = 7 · 6 · 5 = 210 чисел.
Ответ: 210.
Задача 10. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры разные, а номер не может начинаться с нуля?
Решение.
На первый взгляд эта задача такая же, как и предыдущая, но сложность в том, что надо не учитывать те соединения, которые начинаются с нуля. Значит необходимо из существующих 10-ти цифр составить все семизначные номера телефонов, а потом от полученного числа отнять количество номеров, начинающихся с нуля. Формула будет иметь вид:
А107 – А96 = 10 · 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4 – 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4 = 544 320.
Ответ: 544 320.
Задача 11. Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг – это сборники стихотворений, так, чтобы сборники стояли рядом?
Решение.
Сначала примем 5 сборников условно за одну книгу, потому что они должны стоять рядом. Так как в соединении существенным есть порядок, и все элементы используются, значит это перестановки из 8 элементов (7 книг + условная 1 книга). Их количество P8. Далее будем переставлять между собой только сборники стихотворений. Это можно сделать P5 способами. Поскольку нам нужно расставить и сборники, и другие книги, то воспользуемся правилом произведения. Следовательно, P8 · P5 = 8! · 5!. Число способов будет большим, поэтому ответ можно оставить в виде произведения факториалов.
Ответ: 8! · 5!

Задача 12. В классе 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории возле школы нужно 4 мальчика и 3 девочки. Сколькими способами можно их выбрать со всех учеников класса?
Решение.
Сначала отдельно выберем 4 мальчика из 16 и 3 девочки из 12. Так как порядок размещения не учитывается, то соответственные соединения – сочетания без повторений. Учитывая необходимость одновременного выбора и мальчиков, и девочек, используем правило произведения. В результате число способов будет вычисляться таким образом:
C164 · C123 = (16!/(4! · 12!)) · (12!/(3! · 9!)) = ((13 · 14 · 15 · 16) / (2 · 3 · 4)) ·((10 · 11 · 12) / (2 · 3)) = 400 400.
Ответ: 400 400.
Задача 13. Сколькими способами 10 футбольных команд могут разыграть между собой золотые, бронзовые и серебряные медали?
Решение.
На пьедестале почёта находятся 3 команды из 10, и для них очень существенно, кто какое место занял, т.е. порядок следования. Составление групп с учетом порядка следования - размещения. Число размещений определяем по формуле
A_{10}^3 = 10!/(10 - 3)! = 10!/7! = 8·9·10 = 720.
Другой способ решения с использованием И-правила, как в задаче 2б. Однако, чем больше выборка, тем удобнее сразу применять готовую формулу.
Ответ: 720.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

Тема: Вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности.
Дисциплина: ЕН. 03 Теория вероятностей и математическая статистика

Цель практической работы:

Формирование умений решать задачи, используя классическую формулу вероятности. Закрепление умений решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторений и с повторениями. Решать задачи, используя правила комбинаторики.

Задачи практической работы:

1.Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2.Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.
3.Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Тест «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей»
Выберите один правильный ответ.

1. Не верно характеризует понятие «комбинаторика» утверждение:

а) Комбинаторика – раздел математики, посвящённый решению задач выбора и расположения элементов множества в соответствии с заданными условиями б) Комбинаторика – раздел математики, в котором изучается, сколько различных комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов

в) Комбинаторика – один из разделов математики, который приобрел важное значение, в связи с использованием его в теории вероятностей

г) Комбинаторика занимается исследованием закономерностей в массовых явлениях

2. Не верно характеризует понятие «комбинаторные задачи» утверждение:

а) Задачи, требующие осуществлять перебор всех возможных вариантов или подсчитывать их число, называются комбинаторными

б) «Особая примета» комбинаторных задач - вопрос, который можно сформулировать так, чтобы он начинался словами: «Сколькими способами…»

в) Комбинаторные задачи исследуют закономерности появления случайных событий

г) Комбинаторные задачи связаны с составлением различных комбинаций из имеющихся элементов

3. Соединения, которые состоят из одних и тех же элементов и отличаются только порядком их расположения – это:

а) перестановки

б) размещения

в) сочетания

4. Соединения, которые отличаются друг от друга либо набором элементов, либо порядком их расположения – это:

а) перестановки

б) размещения

в) сочетания

5. Вычислите: 14!/12!

а) 7/6

б) 14

в) 120

г) 182

6. Сколько различных трехзначных чисел можно записать, используя цифры 0, 1, 2, 3?

а) 12

б) 24

в) 48

г) 220

7. Сколькими способами можно поставить на полке 4 различные вазы?

а) 12

б) 24

в) 48

г) 220

8. Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 5, 6, 7, 8 при условии, что в каждой записи нет одинаковых цифр?

а) 12

б) 24

в) 48

г) 220

9. Сколько различных аккордов, содержащих 3 звука, можно образовать из 12 клавиш одной октавы?

а) 12

б) 24

в) 48

г) 220

10. В записи разложения бинома Ньютона:

а) число членов получаемого многочлена на единицу меньше показателя степени бинома

б) число членов получаемого многочлена совпадает с показателем степени бинома

в) крайние биномиальные коэффициенты всегда равны 1

г) показатели степени первого и второго слагаемого бинома последовательно убывают на единицу

11. Не верно характеризует понятие «достоверное событие» утверждение:

а) Событие называется достоверным, если в данном опыте оно обязательно наступит

б) Достоверное событие обозначается U

в) Вероятность достоверного события равна 1

г) Объединение достоверного и невозможного событий является пустым множеством

12. Не верно характеризует понятие «противоположные события» утверждение:

а) Противоположные события не могут произойти одновременно в одном испытании

б) Событие, противоположное событию А, обозначается

в) Сумма вероятностей противоположных событий равна 0

г) Пересечение противоположных событий является пустым множеством

13. События А и В называются несовместными, если:

а) появление одного из них исключает появление другого

б) появление одного из них не исключает появление другого

в) событие А происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие В

г) не происходит хотя бы одно из этих событий

14. События А и В называются совместными, если:

а) появление одного из них исключает появление другого

б) появление одного из них не исключает появление другого

в) событие А происходит тогда и только тогда, когда происходит событие В

г) происходит хотя бы одно из этих событий

15. Выясните, в каком из случаев события А и В являются независимыми:

а) $P(A) = 0{,}1$; $P(B) = 0{,}7$; $P(AB) = 0{,}7$

б) $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}4$; $P(AB) = 0{,}6$

в) опыт состоит в последовательном изъятии карт из колоды, А – изъята карта бубновой масти; В – изъят туз

г) опыт состоит в стрельбе по мишени из двух орудий, А – попадание из первого орудия; В – попадание из второго орудия

16. На стол бросаются два игральных кубика. Рассмотрим события: А – на первом кубике 5 очков; В – на втором кубике 5 очков. Сумма событий А + В означает, что:

а) только на одном из кубиков выпало 5 очков

б) на обоих кубиках выпало по 5 очков

в) хотя бы на одном кубике выпало 5 очков

г) ни на одном из кубиков не выпало 5 очков

17. В коробке 3 белых, 4 черных, 2 красных шара. Наугад вынимается один из них. Вероятность того, что вынули белый шар, равна:

а) 1/3

б) 2/3

в) 5/9

г) 7/9

18. Изъята одна карта из колоды в 36 карт. Вероятность того, что это дама или король, равна:

а) 1/4

б) 1/9

в) 2/9

г) 8/9

19. Статистика как наука сформировалась:

а) в 17 веке

б) в 18 веке

в) в 19 веке

г) в 20 веке

20. Предметом математической статистики является изучение:

а) случайных величин

б) случайных событий

в) вероятностей событий

г) упорядоченных совокупностей

21. Какое из утверждений не верно:

а) гистограмма частот имеет вид ступенчатой диаграммы

б) площадь фигуры под гистограммой относительных частот равна 1

в) с помощью гистограммы представляются данные таблицы распределения дискретной случайной величины

г) площадь фигуры под гистограммой частот равна объему выборки

22. Какое из утверждений не верно:

а) распределение значений дискретной случайной величины представляется в виде полигона частот

б) полигон частот имеет вид ступенчатой диаграммы

в) полигон относительных частот имеет вид ломаной линии

г) полигон относительных частот характеризует распределение значений случайной величины по относительным частотам

23. Пусть случайная величина X – дневная выработка рабочих бригады. Математическое ожидание случайной величины X – это:

а) средняя выработка рабочих за смену

б) типичная выработка рабочих бригады

в) различие в выработке рабочих

г) стабильность работы бригады

24. Пусть случайная величина X – количество проданных за день товаров. Дисперсия случайной величины X интерпретируется как:

а) среднесуточные продажи

б) типичный дневной объем продаж

в) различие в объеме дневных продаж

г) стабильность торговли

25. Укажите верное утверждение:

а) Сумма частот в таблице распределения значений случайной величины равна 1

б) Сумма относительных частот в таблице распределения значений случайной величины равна 1

в) Выборка может иметь две медианы

г) Выборка может не иметь медианы

26. Укажите неверное утверждение:

а) Сумма частот в таблице распределения значений случайной величины равна объему выборки

б) Сумма относительных частот в таблице распределения значений случайной величины равна объему выборки

в) Выборка может иметь две моды

г) Выборка может не иметь моды

д) Среднее арифметическое может не совпадать ни с одним значением выборки

е) Медиана может не совпадать ни с одним значением выборки

27. Найдите размах выборки: 21,6; 12,6; 37,3; 16,4; 12,6:

а) 12,6

б) 16,4

в) 20,1

г) 24,7

28. Найдите моду выборки: 3,8; 7,2; 6,4; 6,8; 7,2:

а) 3,4

б) 6,28

в) 6,8

г) 7,2

29. Найдите медиану выборки: 21,6; 12,6; 37,3; 16,4; 12,6:

а) 12,6

б) 16,4

в) 20,1

г) 24,7

30. Найдите среднее арифметическое выборки: 3,8; 7,2; 6,4; 6,8; 7,2:

а) 3,4

б) 6,28

в) 6,8

г) 7,2

Решение задач

Пример 1. Пусть в урне содержится ***6*** одинаковых шаров, причем ***2*** из них - красные, ***3*** - синие и ***1*** - белый. Какова возможность вынуть наудачу из урны цветной шар? Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается можно. Это число и называется вероятностью события ***A*** (появления цветного шара). Таким образом, ***вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события***.

Каждый из возможных результатов испытания (в примере 4, испытание состоит в извлечении шара из урны) называется ***элементарным исходом***.

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, называются ***благоприятствующими*** этому событию. В примере 4 благоприятствуют событию ***A*** (появление цветного шара) 5 исходов.

События называются ***равновозможными***, если есть основания считать, что не одно из них не является более возможным, чем другое.

Пример 2. Появление того или иного числа очков на брошенном игральном кубике – равновозможные события.

Вероятностью P(A) события ***A*** называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. ***Вероятность P(A)*** события ***A*** определяется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где ***m*** – число элементарных исходов, благоприятствующих ***A***; ***n*** – число всех возможных элементарных исходов испытания.

В примере 4 всего элементарных исходов ***6***; из них ***5*** благоприятствуют событию ***A***. Следовательно, вероятность того что взятый шар окажется цветным, равна ***P(A) = 5/6***.

Пример 3. Определить вероятность выпадения нечётного числа очков на кости.

Решение. При бросании кости событие ***A*** – «выпало нечётное число очков» можно записать как подмножество {1, 3, 5} пространства исходов {1, 2, 3, 4, 5, 6} (рис. 1).

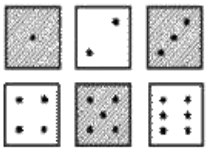


Рис. 1. Пространство исходов при бросании кости

Число всех равновозможных исходов ***n*** = 6, а число благоприятных событию ***A*** – ***m*** = 3. Следовательно,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

<u>*Пример 4*</u>. В урне находится ***7*** шаров: ***2*** белых, ***4*** черных и 1 красный. Вынимается один шар наугад. Какова вероятность того, что вынутый шар будет чёрным?

Решение. Занумеруем шары. Пусть, например, шары с номерами ***1*** и ***2*** – белые, с номерами ***3, 4, 5*** и ***6*** – чёрные, а красному шару присвоим номер ***7***. Так как мы можем вынуть только один из семи шаров, то общее число равновозможных исходов равно семи (***n = 7***). Из них ***4*** исхода – появление шаров с номерами ***3, 4, 5*** и***6*** – приведут к тому, что вынутый шар будет чёрным (***m = 4***). Тем самым, вероятность события ***A***, состоящего в появлении чёрного шара, равна $P(A) = \frac{4}{7}$.

Вычислите вероятность того, что вынутый шар будет белым.

Пример 5. Вычислить вероятность выпадения в сумме ***10*** очков при бросании пары костей.

Решение. Рассмотрим все равновозможные исходы в результате бросания двух костей (их число равно ***36*** - рекомендуем записать в виде таблицы). Выпадение в сумме ***10*** очков (событие ***A***) возможно в трёх случаях – ***4*** очка на первой кости и ***6*** на второй, ***5*** очков на первой и ***5*** на второй, ***6*** очков на первой и ***4*** на второй. Поэтому вероятность события А (выпадения в сумме ***10*** очков) равна $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Пример 6. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что взятый наудачу студентом билет, содержащий 2 вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?

Решение.

1) Обозначим событие А - «Вытянутый студентом билет состоит из подготовленных им билетов». Для вычисления вероятности появления данного события воспользуемся классическим определением вероятности события, согласно которому вероятность определяется по формуле: $P(A)=\frac{m}{n}$,

где *m* – число исходов, при которых появляется событие А,

n – общее число элементарных несовместных равновозможных исходов.

2) Определим *n.* Общее число билетов определяется сочетанием по 2 из 60:

$$n = C^2_{60} = \frac{60!}{58!\cdot 2!} = \frac{60\cdot 59}{2} = 1770$$

3) Количество билетов, вопросы которых студент знает, определяется сочетанием по 2 из 50:

$$m = C^2_{50} = \frac{50!}{48!\cdot 2!} = \frac{50\cdot 49}{2} = 1225$$

4) Определим вероятность события А:

$$P(A)=\frac{1225}{1770} = 0{,}69.$$

Ответ: Вероятность того, что взятый наудачу студентом билет, содержащий 2 вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов равна Р(А) = 0,69. То есть, если будет, например, 100 таких студентов, то 69 из них вытянут билеты, к вопросам которых они подготовлены.

Свойство 1. Вероятность ***достоверного*** события ***А*** равна единице: ***Р(А) = 1***.

Свойство 2. Вероятность ***невозможного*** события ***А*** равна нулю: ***Р(А) = 0***.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между ***нулем*** и ***единицей***:

Пример 7. Так как вероятность выпадения ***13*** очков при бросании пары костей – невозможное событие, его вероятность равна ***нулю***.

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов испытания конечно. На практике же часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно. Кроме этого, часто невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий. Еще труднее указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными. По этой причине, наряду с классическим определением вероятности используют и другие определения, в частности ***статистическое определение***.

Статистическое определение вероятности

Относительная частота наряду с вероятностью принадлежит к основным понятиям теории вероятностей.

Относительной частотой события ***А*** называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где ***m*** – число появлений события ***А***, ***n*** – общее число испытаний.

Классическая вероятность вычисляется до опыта, а относительная частота – после опыта.

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производят опыты, в каждом из которых число испытаний велико, то ***относительная частота***

обнаруживает свойство устойчивости. Это свойство состоит в том, что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Это постоянное число и есть вероятность появления события.

Таким образом, при достаточно большом количестве испытаний в качестве ***статистической вероятности события*** принимают ***относительную частоту*** или число, близкое к ней.

Пример 8. Естествоиспытатель К. Пирсон терпеливо подбрасывал монету и после каждого бросания не ленился записывать полученный результат. Проделав эту операцию $\frac{12012}{24000} = 0{,}5005$ 24 000 раз, он обнаружил, что герб выпадал в 12 012 случаях. Вычисляя относительную частоту выпадения герба, он получил , что практически равно 1/2.

Содержание практической работы

Вариант 1.

1. **Решите задачу:**

Задача 1. В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

Решение. Рассмотрим событие A – из урны будет извлечён белый шар. Данному событию благоприятствуют $m = 15$ элементарных исходов, поэтому по классическому определению:

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён белый шар.

С другими пунктами аналогично, рассмотрим следующие события:

B – из урны будет извлечён красный шар;

C – из урны будет извлечён чёрный шар.

Событию B благоприятствует 5 элементарных исходов, а событию C – 10 элементарных исходов. Таким образом, соответствующие вероятности:

$$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6};$$

$$P(C) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Проверка многих задач по теории вероятности осуществляется с помощью **теоремы о сумме вероятностей событий, образующих полную группу**. В нашем случае события A, B, C образуют полную группу, а значит, сумма соответствующих вероятностей должна обязательно равняться единице: $P(A) + P(B) + P(C) = 1$.

Задача 2. В коробке лежат 8 зеленых, 7 синих и 15 красных карандашей. Вычислить вероятность того, что взятый наугад карандаш будет, синим или зеленым.

Решение:

А: взяли синий карандаш

В: взяли зеленый карандаш

С: взяли синий или зеленый карандаш

Событие С равно сумме событий А и В: С = А + В

Вероятность события А равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{7}{30}$

Вероятность события В равна $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{8}{30}$

Вероятность события С равна $P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{7}{30} + \frac{8}{30} = \frac{15}{30} = 0{,}5$

Ответ: 3.

Задача 3. В одной коробке находится 4 белых и 8 черных шаров, а в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой коробки вынули по шару. Вычислить вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение:

А: из первой коробки вынули белый шар

В: из второй коробки вынули белый шар

С: из коробок вынули белые шары

Вероятность события А равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Вероятность события В равна $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Вероятность события С равна $P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \approx 0{,}083$

Ответ: 0,083

Задача 4. В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

Решение. 30 – 5 = 25 холодильников не имеют дефекта.

По классическому определению:

$p = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$ – вероятность того, что наугад выбранный холодильник не имеет *дефекта.*

Ответ: $\frac{5}{6} \approx 0{,}8333$

Задача 5. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение:

А: абонент наугад набрал нужные цифры

Число всех возможных исходов равно $n = A_{10}^{2} = \frac{10!}{8!} = 90$

Число исходов, благоприятствующих событию А m = 1

Вероятность события А равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{90} = 0{,}011$

Ответ: 0,011

Задача 6. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места.

Решение. Вероятность набрать верную цифру из десяти равна по условию 1/10.

Рассмотрим следующие случаи:

1. первый звонок оказался верным, вероятность равна 1/10 (сразу набрана нужная цифра).
2. первый звонок оказался неверным, а второй - верным, вероятность равна 9/10*1/9=1/10

(первый раз набрана неверная цифра, а второй раз верная из оставшихся девяти цифр).
3. первый и второй звонки оказались неверными, а третий - верным, вероятность равна 9/10*8/9*1/8=1/10 (аналогично пункту 2).

Всего получаем P=1/10+1/10+1/10=3/10=0,3 - вероятность того, что ему придется звонить не более чем в три места. **Ответ:** 0,3

Задача 7. Абонент забыл последние 2 цифры телефонного номера, но помнит, что они различны и образуют двузначное число, меньшее 30. С учетом этого он набирает наугад 2 цифры. Найти вероятность того, что это будут нужные цифры.

Решение. Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где m - число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n - число всех равновозможных элементарных исходов.

m=1, так как только одно число правильное. Подсчитаем количество всех возможных двузначных чисел с разными цифрами, меньшее 30, которые может набрать абонент:

Ответ: 1/18.

Задача 8. На шахматную доску случайным образом поставлены две ладьи. Какова вероятность, что они не будут бить одна другую?

Решение. Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где m - число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n - число всех равновозможных элементарных исходов.

Число всех способов расставить ладьи равно n=64·63=4032 (первую ладью ставим на любую из 64 клеток, а вторую - на любую из оставшихся 63 клеток).

Число способов расставить ладьи так, что они не будут бить одна другую равно m=64·(64−15)=64·49=3136 (первую ладью ставим на любую из 64 клеток, вычеркиваем клетки, которые находятся в том же столбце и строке, что и данная ладья, затем вторую ладью ставим на любую из оставшихся после вычеркивания 49 клеток).

Тогда искомая вероятность P=3136/4032=49/63=7/9=0,778. ***Ответ:*** 7/9

Задача 9. Цифры 1, 2, 3, …, 9, выписанные на отдельные карточки складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке:

а) четное; б) двузначное.

Решение. Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где m - число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n - число всех равновозможных элементарных исходов.

Случай а) n=9, так как всего 9 различных карточек. m=4, так как всего на 4 карточках написаны четные числа (2, 4, 6, 8). Тогда P=4/9.

Случай б) n=9, так как всего 9 различных карточек. m=0, так как на всех карточках написаны однозначные числа. Тогда P=0/9=0. ***Ответ:*** 4/9, 0.

Задача 10. На каждой из пяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: "а", "м", "р", "т", "ю". Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной карточке можно прочесть слово "юрта".

Решение. Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где m - число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n - число всех равновозможных элементарных исходов.

n=5·4·3·2=120 способов, так как первую карточку (букву) можно вытянуть (выбрать) 5 способами (так как всего карточек пять), вторую - 4 (осталось к этому шагу четыре), третью - 3 и четвертую - 2 способами.

m=1, так как искомая последовательность карточек "ю", потом "р", потом "т", потом "а" только одна.

Получаем вероятность P=1/120. ***Ответ:*** 1/120.

Задача 11. Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?

Решение. Используем формулу классической вероятности: P=m/n, где n - число всех равновозможных элементарных исходов, m - число элементарных исходов, благоприятствующих осуществлению события.

Число различных перестановок из букв А, К, К, Л, У равно

n=5!1!2!1!1!=1·2·3·4·51·2=60,

из них только одна соответствует слову "кукла" (m=1), поэтому по классическому определению вероятности вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла" равна P=1/60. ***Ответ:*** 1/60.

Задача 12. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания номера слева направо, но не обязательно рядом.

Решение. Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где n - число всех равновозможных элементарных исходов, m - число элементарных исходов, благоприятствующих осуществлению события A = (Тома стоят в порядке возвозрастания номера слева направо, но не обязательно рядом). n=40·39·38=59280, так как первый том можно поставить на любое из 40 мест, второй - на любое из 39 мест и третий - на любое из оставшихся 38 мест. А число m=C340=40!37!3!=40·39·381·2·3=9880.

Тогда искомая вероятность P(A)=mn=988059280=16. ***Ответ:*** 1/6.

Задача 13. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему три вопроса?

Решение:

А: студент знает предложенные ему три вопроса

Число всех возможных исходов равно $n = C_{25}^{3} = \frac{25!}{3!\,22!} = 2300$

Число исходов, благоприятствующих наступлению события А равно $m = C_{20}^{3} = \frac{20!}{3!\,17!} = 1140$

Вероятность события А равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1140}{2300} = 0{,}496$ ***Ответ:*** 0,496

Задача 14. На карточках написаны целые числа от 1 до 15 включительно. Наудачу извлекаются две карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел, написанных на карточках, равна десяти?

Решение:

А: сумма чисел, написанных на карточках, равна десяти

Число всех возможных исходов равно $n = C_{15}^{2} = \frac{15!}{2!\,13!} = 105$

Число исходов, благоприятствующих событию А равно 4 (1+ 9; 2+8; 3+7; 4+6)

Вероятность события А равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{105} = 0{,}038$ ***Ответ:*** 0,038

Задача 15. В урне лежат шары, двузначные номера которых составлены из цифр 1,2,3,4,5. Какова вероятность вынуть шар с номером 15?

Решение:

А: вынут шар с номером 15

Число всех возможных исходов равно $n = A_{5}^{2} = \frac{5!}{3!} = 20$

Число исходов, благоприятствующих событию А m = 1

Вероятность события А равна $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{20}=0,05$ ***Ответ:*** 0,05

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

Тема: Вычисление вероятностей сложных событий.
Дисциплина: ЕН. 03 Теория вероятностей и математическая статистика

Цель практической работы:
Решение задач на вычисление сложных событий, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Задачи практической работы:
1.Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2.Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.
3.Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Формула полной вероятности
1. В пирамиде 10 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,85; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.
2. В первой коробке содержится 25 радиоламп, из них 20 стандартных; во второй коробке – 15 ламп, из них 11 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.
3. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная, равна 0,85, а второго – 0,95. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) – стандартная.
4. Набирая номер телефона, абонент забыл 2 цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набранные цифры правильные.
5. Из 50деталей 18 изготовлены в первом цехе, 20 – во втором, остальные в третьем. Первый и третий цеха дают продукцию отличного качества с вероятностью 0,95, второй цех – с вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет отличного качества?
6. В пирамиде 25 винтовок, 8 из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,9; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,65. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

7. В первой коробке содержится 35 радиоламп, из них 20 стандартных; во второй коробке – 25 ламп, из них 10 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в

первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.
8. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная, равна 0,7, а второго – 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) – стандартная.
9. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 8.
10. Из 70деталей 20 изготовлены в первом цехе, 25 – во втором, остальные в третьем. Первый и третий цеха дают продукцию отличного качества с вероятностью 0,9, второй цех – с вероятностью 0,75. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет отличного качества?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5

Тема: **Вычисление вероятностей событий в схеме Бернулли**
Дисциплина: ЕН. 03 Теория вероятностей и математическая статистика

Цель практической работы:

Решение задач на вычисление вероятностей событий в схеме Бернулли, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Задачи практической работы:
1.Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2.Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.
3.Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Решение задач.
1. Найти вероятность того, что событие А появится не менее трех раз в пяти испытаниях, если вероятность появления события А в одном испытании равна 0,4.
2. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не менее трех?
3. В каждом из 700 независимых испытаний событие А происходит с постоянной вероятностью 0,35. Найти вероятность того, что событие А происходит: точно 270 раз; меньше чем 270 и больше чем 230 раз.
4. Найти вероятность того, что событие А появится в пяти независимых испытаниях не менее трех раз, если в каждом испытании вероятность появления события А равна 0,4.
5. Найти вероятность того, что при 300 испытаниях событие наступит ровно 100 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,6.
6. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет не менее двух раз.
7. В семье шесть детей. Найти вероятность того, что среди этих детей не более двух мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

8. В каждом из 500 независимых испытаний событие А происходит с постоянной вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что событие А происходит: точно 190 раз; меньше чем 235раз.

9. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент выключены все моторы.

10. Найти вероятность того, что при 300 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,4.

ТЕСТ №2

Тема: Случайные независимые испытания по схеме Бернулли.

Вам предлагается 5 тестовых заданий по теме случайные независимые испытания по схеме Бернулли. Среди предлагаемых вариантов ответов **только один** является верным.

1. Дана задача: Вероятность того, что на странице студенческого реферата есть опечатка, равна 0,03. Реферат состоит из 8 страниц. Определить вероятность того, что ровно 5 из них с опечаткой.
2. Для решения этой задачи используют:
а. Формулу Бернулли;
б. Локальную теорему Лапласа;
в. Интегральную теорему Лапласа;
г. Формулу Пуассона.
3. В семье планируют завести 5 детей. Если считать вероятность рождения мальчика 0,515, то – наивероятнейшее число девочек в семье равно:
а. 1;
б. 2;
в. 3;
г. 4.
4. Имеется группа, состоящая из 500 человек. Найти вероятность того, что у двух человек день рождения придется на Новый год. Считать, что вероятность рождения в фиксированный день равна $\frac{1}{365}$.
Для решения этой задачи используют:

а. Формулу Бернулли;
б. Локальную теорему Лапласа;
в. Интегральную теорему Лапласа;
г. Формулу Пуассона.
5. Для определения вероятности того, что в 300 испытаниях событие *A* произойдет не менее 40 раз, если вероятность А в каждом испытании постоянна и равна 0,15, используют:
а. Формулу Бернулли и теорему сложения вероятностей несовместных событий;
б. Локальную теорему Лапласа;
в. Интегральную теорему Лапласа;
г. Формулу Пуассона,
д. Теорему сложения вероятностей несовместных событий,
е. Свойство вероятностей противоположных событий.

6. Дана задача: известно, что в некоторой местности в сентябре бывает 18 дождливых дней. Какова вероятность того, что из случайно взятых в этом месяце семи дней два дня окажутся дождливыми?

Для решения этой задачи используют:

а. Формулу Бернулли;

б. Локальную теорему Лапласа;

в. Интегральную теорему Лапласа;

г. Формулу Пуассона.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6

Тема: **Вычисление вероятности по формуле Байеса**.

Дисциплина: ЕН. 03 Теория вероятностей и математическая статистика

Цель практической работы:

Решение задач по формуле Байеса. Получение практических навыков в решении задач по разделам теории вероятностей

Задачи практической работы:

1.Повторить теоретический материал по теме практической работы.

2.Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.

3.Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Задание 1.

Краткое содержание теории

Если событие *A* может произойти только при выполнении одного из событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, которые образуют ***полную группу несовместных событий***, то вероятность события *A* вычисляется по формуле

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n).$$

Эта формула называется ***формулой полной вероятности***.

Вновь рассмотрим полную группу несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, вероятности появления которых $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$. Событие *A* может произойти только вместе с каким-либо из событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, которые будем называть ***гипотезами***. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)$$

Если событие *A* произошло, то это может изменить вероятности гипотез $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$.

По теореме умножения вероятностей

$$P(AB_1) = P(B_1)P(A|B_1) = P(A)P(B|A),$$

откуда

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}.$$

Аналогично, для остальных гипотез

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Полученная формула называется ***формулой Байеса*** (***формулой Бейеса***). Вероятности гипотез $P(B_i \mid A)$ называются ***апостериорными вероятностями***, тогда как $P(B_i)$ - ***априорными вероятностями***.

Задание 2.

Работа над решением задач.

Пример. В магазин поступила новая продукция с трех предприятий. Процентный состав этой продукции следующий: 20% - продукция первого предприятия, 30% - продукция второго предприятия, 50% - продукция третьего предприятия; далее, 10% продукции первого предприятия высшего сорта, на втором предприятии - 5% и на третьем - 20% продукции высшего сорта. Найти вероятность того, что случайно купленная новая продукция окажется высшего сорта.

Решение. Обозначим через *B* событие, заключающееся в том, что будет куплена продукция высшего сорта, через A_1, A_2, A_3 обозначим события, заключающиеся в покупке продукции, принадлежащей соответственно первому, второму и третьему предприятиям. Можно применить формулу полной вероятности, причем в наших обозначениях:

$P(A_1) = 0,2 \quad P(B|A_1) = 0,1$

$P(A_2) = 0,3 \quad P(B|A_2) = 0,05$

$P(A_3) = 0,5 \quad P(B|A_3) = 0,2$

Подставляя эти значения в формулу полной вероятности, получим искомую вероятность:

$P(B) = 0,2 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,2 = 0,135.$

Пример. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго - 0,5; для третьего - 0,8. Мишень не поражена. Найти вероятность того, что выстрелы произведены первым стрелком.

Решение. Возможны три гипотезы:

A_1 - на линию огня вызван первый стрелок,

A_2 - на линию огня вызван второй стрелок,

A_3 - на линию огня вызван третий стрелок.

Так как вызов на линию огня любого стрелка равновозможен, то $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}.$

В результате опыта наблюдалось событие B - после произведенных выстрелов мишень не поражена. Условные вероятности этого события при сделанных гипотезах равны:

$P(B \mid A_1) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49;$

$P(B \mid A_2) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25;$

$P(B \mid A_3) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04.$

по формуле Байеса находим вероятность гипотезы A_1 после опыта:

$$P(A|B) = \frac{0,49 \cdot 1/3}{1/3 \cdot 0,49 + 1/3 \cdot 0,25 + 1/3 \cdot 0,04} = \frac{0,49}{0,78} = 0,628.$$

Пример. На трех станках-автоматах обрабатываются однотипные детали, поступающие после обработки на общий конвейер. Первый станок дает 2% брака, второй – 7%, третий – 10%. Производительность первого станка в 3 раза больше производительности второго, а третьего – в 2 раза меньше, чем второго.

а) Каков процент брака на конвейере?

б) Каковы доли деталей каждого станка среди бракованных деталей на конвейере?
Решение. Возьмем с конвейера наудачу одну деталь и рассмотрим событие А – деталь бракованная. Оно связано с гипотезами относительно того, где была обработана эта деталь: H_k – взятая наудачу деталь обработана на k-ом станке, $k = 1, 2, 3$.
Условные вероятности (в условии задачи они даны в форме процентов):
$P(A|H_1) = 0,02,\ P(A|H_2) = 0,07,\ P(A|H_3) = 0,1.$
Зависимости между производительностями станков означают следующее:
$P(H_1) = 3P(H_2),\ P(H_3) = 0,5P(H_2)$.
А так как гипотезы образуют полную группу, то $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$.
Решив полученную систему уравнений, найдем: $P(H_1) = 6/9,\ P(H_2) = 2/9,\ P(H_3) = 1/9$.
а) Полная вероятность того, что взятая наудачу с конвейера деталь – бракованная:
$$P(A) = \sum P(A|H_i)P(H_i) = \frac{6}{9}0,02 + \frac{2}{9}0,07 + \frac{1}{9}0,1 = 0,04.$$
Другими словами, в массе деталей, сходящих с конвейера, брак составляет 4%.
б) Пусть известно, что взятая наудачу деталь – бракованная. Пользуясь формулой Байеса, найдем условные вероятности гипотез:
$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{6/9 \cdot 0,02}{0,04} = 0,33,$$
$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{2/9 \cdot 0,07}{0,04} = 0,39,$$
$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3)P(H_3)}{P(A)} = \frac{1/9 \cdot 0,1}{0,04} = 0,28.$$
Таким образом, в общей массе бракованных деталей на конвейере доля первого станка составляет 33%, второго – 39%, третьего – 28%.
Задание 3.
Контрольная работа
1. Являются ли случаями следующие группы событий: а) опыт — бросание монеты; события: *A1* — появление герба; *A2* — появление цифры; б) опыт — бросание двух монет; события: *B1* — появление двух гербов; *B2* — появление двух цифр; *B3* — появление одного герба и одной цифры; в) опыт — бросание игральной кости; события: *C1* — появление не более двух очков; *C2* — появление трех или четырех очков; *C3* —появление не менее пяти очков; г) опыт — выстрел по мишени; события: *D1* — попадание; *D2* — промах; д) опыт — два выстрела по мишени; события:*E0* — ни одного попадания; *E1* — одно попадание; *E2* — два попадания; е) опыт — вынимание двух карт из колоды; события: *F1* — появление двух красных карт; *F2* — появление двух черных карт?
2. В урне А белых и В черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар — белый.
3. В урне А белых и *B* черных шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.
4. В урне А белых и В черных шаров. Из урны вынули один шар и, не глядя, отложили в сторону. После этого из урны взяли еще один шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону, — тоже белый.
5. Из урны, содержащей А белых и В черных шаров, вынимают один за другим все шары, кроме одного. Найти вероятность того, что последний оставшийся в урне шар будет белым.

6. Из урны, в которой А белых шаров и В черных, вынимают подряд все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.
7**.** В урне А белых и В черных шаров ($A > 2$). Из урны вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.
8. В урне А белых и В черных шаров (А > 2, В > 3). Из урны вынимают сразу пять шаров. Найти вероятность p того, что два из них будут белыми, а три черными.
9. В партии, состоящей из X изделий, имеется I дефектных. Из партии выбирается для контроля I изделий. Найти вероятность p того, что из них ровно J изделий будут дефектными.
10. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность следующих событий: A — появление четного числа очков; B — появление не менее 5 очков; C— появление не более 5 очков.
11. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность p того, что оба раза появится одинаковое число очков.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

Тема: Решение задач на запись распределения ДСВ.
Дисциплина: ЕН. 03 Теория вероятностей и математическая статистика

Цель практической работы:

Решение задач на запись распределения ДСВ, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Задачи практической работы:
1.Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2.Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.
3.Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Выполнение решения задач
1. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	2	5	8	9
P	0,2	0,4	0,1	0,3

2. В денежной лотерее выпущено 500 билетов. Разыгрывается два выигрыша по1000 рублей, десять выигрышей по 100 рублей и двадцать – по 50 рублей. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.
3. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных.
4. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	2	5	8	11	14
P	p_1	0,15	p_3	0,45	0,15

Найти вероятности p_1 и p_3, если известно, что p_1 в 2 раза меньше p_3.

5. Банк выдает пять кредитов. Вероятность невозврата кредита равна 0,2 для каждого из заемщиков. Составить закон распределения случайной величины X – числа заемщиков, не вернувших кредит по окончании срока кредитования.

Индивидуальная работа

1. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	1	4	7	9
P	0,1	0,6	0,2	0,1

2. В денежной лотерее выпущено 200 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 100 рублей, пять выигрышей по 50 рублей и двадцать – по 10 рублей. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

3. В партии 15% нестандартных деталей. Наудачу отобраны пять деталей. Написать закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди пяти отобранных.

4. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	3	6	9	12	18
P	0,25	P_2	p_3	0,25	0,15

Найти вероятности p_2 и p_3, если известно, что p_2 в 2 раза больше p_1.

5. Банк выдает четыре кредита. Вероятность невозврата кредита равна 0,3 для каждого из заемщиков. Составить закон распределения случайной величины X – числа заемщиков, не вернувших кредит по окончании срока кредитования.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8

Тема: Вычисление характеристик ДСВ.

Дисциплина: ЕН. 03 Теория вероятностей и математическая статистика

Цель практической работы:

Решение задач на вычисление характеристик ДСВ. Развитие логического и творческого мышления студентов. Развитие самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Решение задач

1. Производится три выстрела с вероятностями попадания в цель, равными p_1=0,7; p_2=0,8 и p_3=0,6.Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

2 Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

3. Случайная величина X может принимать два возможных значения: x_1 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7, причем x_1меньше x_2. Найти x_1 и x_2, зная, что M(X)=2,7 и D(X)=0,21.
4. Дискретная случайная величина X принимает 3 возможных значения: x_1=6 с вероятностью p_1=0,5, x_2=4 с вероятностью p_2=0,3 и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что M(X)=12.
5. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины, заданной законом распределения.

У	2	4	5	6
P	0,1	0,3	0,2	0,4

Индивидуальная работа

1. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.
2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

3. Случайная величина X может принимать два возможных значения: x_1=4 с вероятностью p_1 и x_2 = 6 с вероятностью p_2. Найти p_1 и p_2, зная, что M(X)=10,8 и D(X)=0,84.
4. Дискретная случайная величина X принимает 3 возможных значения: x_1=8 с вероятностью p_1=0,2, x_2=6 с вероятностью p_2=0,4 и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что M(X)=20.
5. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины, заданной законом распределения.

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,3

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 9

Тема: **Вычисление вероятностей и нахождение характеристик для НСВ с помощью функции плотности и интегральной функции распределения**
Дисциплина: ЕН. 03 Теория вероятностей и математическая статистика

Цель практической работы:
Решение задач на вычисление вероятностей и нахождение характеристик для НСВ с помощью функции плотности и интегральной функции распределения. Развитие логического и творческого мышления студентов. Развитие самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Задачи практической работы:
1.Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2.Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.
3.Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Решение задач.

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной плотностью распределения f(x) = 1 на интервале (0;1).
2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной функцией распределения F(x)=
$$\begin{cases} 0 \ \text{при} \ x \le 0, \\ \frac{1}{4}x \ \text{при} \ 0 < x \le 4, \\ 1 \ \text{при} \ x > 4. \end{cases}$$
3. Случайная величина X в интервале (2;4) задана плотностью распределения f(x) = -0,75x^2+ 4,5x – 6;вне этого интервала f(x) = 0. Найти моду величины X.
4. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения F(x)=
$$\begin{cases} 0 \ \text{при} \ x \le 0, \\ 5x^2 \text{-}1 \ \text{при} \ 0 < x \le 1, \\ x \ \text{при} \ x > 1. \end{cases}$$
5. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x) = 2x в интервале (0;2); вне этого интервала f(x) = 0. Найти начальные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Индивидуальное выполнение задач

1.Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной плотностью распределения f(x)= $\frac{1}{2}x$ на интервале (0;2).

2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной функцией распределения F(x)= $\begin{cases} 0 \ \text{при} \ x \le 0, \\ \cos x \ \text{при} \ 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \ \text{при} \ x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

3. Случайная величина X в интервале (0;1) задана плотностью распределения f(x)= 3x^2; вне этого интервала f(x) = 0. Найти моду величины X.
4. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения F(x)=
$$\begin{cases} 0 \ \text{при} \ x \le 0, \\ x \ \text{при} \ 0 < x \le 1, \\ 1 \ \text{при} \ x > 1. \end{cases}$$
5. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x) = 4x в интервале (0;3); вне этого интервала f(x) = 0. Найти начальные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 10

Тема: **Вычисление вероятностей для нормально распределенной величины; вычисление вероятностей и нахождение характеристик для показательно распределенной величины.**
Дисциплина: ЕН. 03 Теория вероятностей и математическая статистика

Цель практической работы:
Решение задач на вычисление вероятностей для нормально распределенной величины или суммы нескольких нормально-распределенных величин. Вычисление вероятностей и нахождение характеристик для показательно распределенной величины. Развитие логического и творческого мышления студентов. Развитие самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Задачи практической работы:
1.Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2.Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.
3.Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Решение задач.
1. Математическое ожидание нормально распределенной величины Х равно 3 и среднее квадратическое отклонение 2. Написать плотность вероятности Х.
2. Нормально распределенная случайная величина Х задана плотностью f(x) $=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию Х.
3. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр λ=4.
4. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного функцией распределения F(x) = $1-e^{-0,1x}$ (x≥ 0).
5. Найти математическое ожидание показательного распределения, заданного при x$\geq$ 0 плотностью распределения f(x) = $5e^{-5x}$.
Индивидуальное решение задач.
1. Математическое ожидание нормально распределенной величины Х равно 9 и среднее квадратическое отклонение 6. Написать плотность вероятности Х.
2.Нормально распределенная случайная величина Х задана плотностью f(x)=$\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-173)^2}{72}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию Х.
3. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр λ=6.
4. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного функцией распределения F(x) = $1-e^{-3x}$ (x≥ 0).
5. Найти математическое ожидание показательного распределения, заданного при x$\geq$ 0 функцией распределения F(x) = $1-e^{-0,1x}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 11

Тема: **Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по нормальному закону**
Дисциплина: ЕН. 03 Теория вероятностей и математическая статистика

Цель практической работы:
Вспомнить важнейшие понятия и законы теории вероятностей математической статистики

Задачи практической работы:
1.Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2.Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.
3.Выполнить задания.

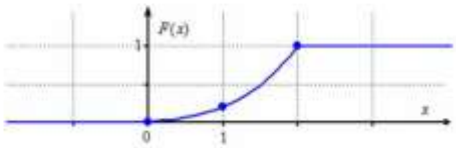
Содержание и последовательность выполнения заданий

Практическое выполнение заданий.
№ 1. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0 \\ \frac{1}{10}(x^3 + x), & \text{если} \quad 0 \le x \le 2 \\ 1, & \text{если} \quad x > 2 \end{cases}$$

Вычислить $M(X), D(X), \sigma(X)$. И построим ещё графики $F(x)$ и $f(x)$, ну а куда же без них?

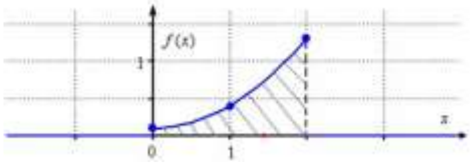
Решение начнём с графика функции распределения. При его ручном построении удобно найти промежуточное значение $F(1) = \frac{1}{10}(1^3 + 1) = 0{,}2$ и аккуратно провести кусок кубической параболы $y = \frac{1}{10}(x^3 + x)$:



Функция распределения $F(x) = P(X < x)$ описывает вероятность того, что случайная величина X примет значение, МЕНЬШЕЕ, чем *переменная* x, «пробегающая» все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Данная функция изменяется в пределах $0 \le F(x) \le 1$ и не убывает *(т. к. «накапливает» вероятности), а также* является непрерывной (для НСВ). Очевидно, что случайная величина X принимает случайные значения из отрезка $[0; 2]$, и какие из них *более вероятны*, а какие – *менее*, наглядно показывает функция плотности распределения вероятностей:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0 \\ \frac{1}{10}(3x^2 + 1), & \text{если} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{если} \quad x > 2 \end{cases}$$

И снова опорные точки: $f(0)=\frac{1}{10},\ f(1)=\frac{4}{10},\ f(2)=\frac{13}{10}$ с немедленным чертежом:



В отличие от $F(x)$ функции плотности может быть разрывна и может принимать значения бОльшие единицы *(как в нашем случае)*; может, как убывать, так и возрастать и даже иметь экстремумы *(наш кусок параболы растёт)*. Однако, она

неотрицательна: $f(x)\ge 0$ и обладает свойством $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$, которое лучше всегда проверять (а то мало ли, опечатка или ошибка). В силу *аддитивности* интеграла:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\frac{1}{10}\int\limits_{0}^{2}(3x^2+1)dx+\int\limits_{2}^{+\infty} 0\cdot dx=$$

$$=0+\frac{1}{10}(x^3+x)\Big|_0^2+0=\frac{1}{10}(8+2-0-0)=\frac{1}{10}\cdot 10=1$$

– данный результат равен заштрихованной площади и с вероятностной точки зрения означает тот факт, что случайная величина X достоверно примет одно из значений отрезка $[0;2]$. Причём, по чертежу хорошо видно, что значения из правой части отрезка гораздо более вероятны, чем значения слева.

Вычислим:

$$P(0\le X\le 1)=\int\limits_{0}^{1} f(x)dx=F(x)\Big|_0^1=\frac{1}{10}(x^3+x)\Big|_0^1=\frac{1}{10}(1+1-0-0)=\frac{1}{5}$$

– вероятность того, что случайная величина X примет значения из промежутка $[0;1]$

Очевидно, что математическое ожидание *(среднеожидаемое значение)* случайной величины X обязательно находится в «живом» отрезке $[0;2]$ и смещено ближе к его правому концу. Убедимся в этом аналитически. По формуле вычисления математического ожидания, и в силу того же свойства *аддитивности*:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} x\cdot 0\cdot dx+\frac{1}{10}\int\limits_{0}^{2} x(3x^2+1)dx+\int\limits_{2}^{+\infty} x\cdot 0\cdot dx=0+\frac{1}{10}\int\limits_{0}^{2}(3x^3+x)dx+0=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{3x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2=\frac{1}{10}\cdot(12+2-0-0)-0=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}=1{,}4$$

Дисперсию *(меру рассеяния случайных значений относительно* $M(X)$ *)* вычислим по формуле:

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\frac{1}{10}\int\limits_{0}^{2} x^2(3x^2+1)dx=\frac{1}{10}\int\limits_{0}^{2}(3x^4+x^2)dx=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{3x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{96}{5}+\frac{8}{3}-0-0\right)=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{288+40}{15}\right)=\frac{1}{10}\cdot\frac{328}{15}=\frac{164}{75}$$

Таким образом:

$$D(X)=\frac{164}{75}-\left(\frac{7}{5}\right)^2=\frac{164}{75}-\frac{49}{25}=\frac{164}{75}-\frac{147}{75}=\frac{17}{75}\approx 0{,}23$$

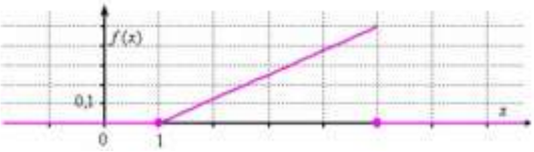
И, наконец, среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = D(X) = \sqrt{\frac{17}{75}} \approx 0{,}48$$

Ответ: $M(X) = \frac{7}{5}, \quad D(X) = \frac{17}{75}, \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{17}{75}} \approx 0{,}48$

<u>№ 2.</u>

Дана функция:



Представить $f(x)$ в аналитическом виде и показать, что она может служить плотностью вероятностей непрерывной случайной величины X. Вычислить $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

Решение: представим $f(x)$ в аналитическом виде. Составим уравнение прямой по точкам $(1;\,0)$ и $\left(5;\,\frac{1}{2}\right)$:

$$\frac{x-1}{5-1} = \frac{y-0}{\frac{1}{2}-0}$$

$$\frac{x-1}{4} = 2y$$

$$x-1 = 8y$$

$$y = \frac{1}{8}(x-1)$$

Таким образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 1 \\ \frac{1}{8}(x-1), \quad 1 < x < 5 \\ 0, x \ge 5 \end{cases}$$

Примечание: верхние неравенства можно записать и так: $x < 1, \quad 1 \le x < 5$, в условии нет однозначной инструкции на этот счёт.

Покажем, что $f(x)$ может служить плотностью вероятностей НСВ X:

1) функция $f(x) \ge 0$ на всей числовой прямой;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{8}\int\limits_{1}^{5}(x-1)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^5 = \frac{1}{8}\left(\frac{25}{2} - 5 - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{8}\cdot 8 = 1$

Таким образом, $f(x)$ может служить плотностью вероятностей непрерывной случайной величины X

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{8}\int\limits_{1}^{5} x(x-1)dx = \frac{1}{8}\int\limits_{1}^{5}(x^2 - x)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^5 =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{125}{3} - \frac{25}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{88}{3} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{8}\int_1^5 x^2(x-1)dx = \frac{1}{8}\int_1^5 (x^3 - x^2)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^5 =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{625}{4} - \frac{125}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{344}{3} = \frac{43}{3}$$

Таким образом:

$$D(X) = \frac{43}{3} - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{43}{3} - \frac{121}{9} = \frac{129}{9} - \frac{121}{9} = \frac{8}{9}$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}94$$

№ 3.

Непрерывная случайная величина X задана функцией плотности распределения $f(x) = \begin{cases} \frac{C}{\sqrt{4-x^2}}, & \text{если } x \in [-1; 1] \\ 0, & \text{если } x \notin [-1; 1] \end{cases}$.

Найти: $C, M(X), D(X)$ …, прямо так и хочется добавить ещё, но в жуткой борьбе с самим собой я остановился, чтобы сосредоточиться на главном =)

Решение: найдём коэффициент C. Согласно свойству $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{Cdx}{\sqrt{4-x^2}} = 1$$

Выносим константу и пользуемся чётностью подынтегральной функции на симметричном промежутке:

$$2C\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2^2 - x^2}} = 1$$

интеграл здесь табличный, и значения арксинуса «хорошие»:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2^2 - x^2}} = \left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

Таким образом:

$2C\cdot\frac{\pi}{6} = 1 \;\Rightarrow\; C = \frac{3}{\pi}$ и функция плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi\sqrt{4-x^2}}, & \text{если } x \in [-1; 1] \\ 0, & \text{если } x \notin [-1; 1] \end{cases}$$

Проверка: $\frac{3}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{3}{\pi}\cdot 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} = \frac{6}{\pi}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{6}{\pi}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = 1$,

не забываем проконтролировать, что $\frac{3}{\pi\sqrt{4-x^2}} > 0$.

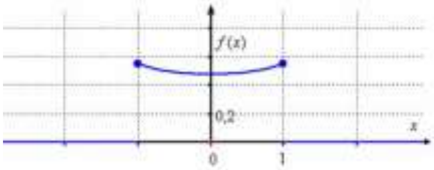
Вычислим математическое ожидание:

$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{3}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} = 0$, как интеграл от нечётной функции по симметричному промежутку.

Но, в принципе, тут можно не полениться и подвести функцию под знак дифференциала:

$$\frac{3}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}=-\frac{3}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d(4-x^2)}{2\sqrt{4-x^2}}=-\frac{3}{\pi}(\sqrt{4-x^2})\Big|_{-1}^{1}=-\frac{3}{\pi}(\sqrt{3}-\sqrt{3})=0$$

Математическое ожидание $M(X)=0$ «разделило» вероятности *(единичную площадь под функцией плотности)* на 2 равные части:



Поскольку математическое ожидание равно нулю, то дисперсию удобно вычислить «одной строкой». Используем формулу и чётность подынтегральной функции:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(X))^2=\frac{3}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}-0^2=\frac{3}{\pi}\cdot 2\int_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}=(*)$$

Здесь сразу же удобно провести замену

$$x=2\sin t \quad\Rightarrow\quad dx=2\cos t dt$$

переменной: $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=\sqrt{4(1-\sin^2 t)}=2\sqrt{\cos^2 t}=2\cos t$

Найдём новые пределы интегрирования. Если $x=2\sin t$, то $t=\arcsin\frac{x}{2}$ и:

$$t_1=\arcsin\frac{0}{2}=0,\quad t_2=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$$

$$(*)=\frac{6}{\pi}\int_{0}^{\pi/6}\frac{4\sin^2 t\cdot 2\cos t dt}{2\cos t}=\frac{24}{\pi}\int_{0}^{\pi/6}\sin^2 t dt=\frac{24}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/6}(1-\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{12}{\pi}\cdot\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{12}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}-0+0\right)=\frac{12}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\approx 0{,}35$$

Вычисляем среднее квадратическое отклонение:

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{2-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}\approx 0{,}6$ –взгляните на чертёж и мысленно отмерьте от $M(X)$ влево/вправо 0,6.

Ответ: $C=\frac{3}{\pi},\quad M(X)=0,\quad D(X)=2-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

№ 4. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ x^2/9 & \text{при } x\in[0,3],\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. Для нахождения $M(X)$ и $D(X)$ нам потребуется плотность распределения данной случайной величины (см. приведенные выше формулы). Получаем:

$$\varphi(x)=F'(x)=\begin{cases}0'=0 & \text{при } x<0,\\ (x^2/9)'=\frac{2}{9}x & \text{при } x\in[0,3],\\ 1'=0 & \text{при } x>3,\end{cases}$$

или

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{2}{9}x & \text{при } x\in[0,3],\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Тогда имеем

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot 0dx+\int_{0}^{3}x\cdot\frac{2}{9}xdx+\int_{3}^{+\infty}x\cdot 0dx=\frac{2}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^3=2.$$

Геометрически, полученное значение математического ожидания есть абсцисса центра тяжести фигуры под графиком плотности распределения, т.е. абсцисса прямоугольного треугольника *OAB* (см. рис. 7; напомним, что центр тяжести треугольника есть точка пересечения медиан этого треугольника, а медианы в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины).

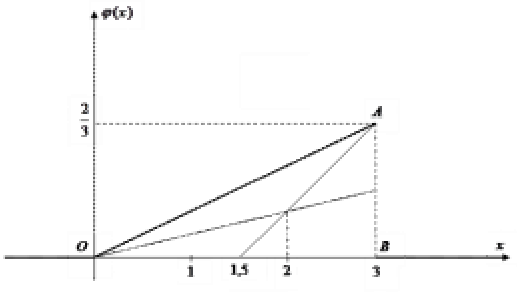


Рис. 7

Завершая решение, найдем дисперсию рассматриваемой случайной величины.

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x^2\cdot 0dx+\int_{0}^{3}x^2\cdot\frac{2}{9}xdx+\int_{3}^{+\infty}x^2\cdot 0dx=\frac{2}{9}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^3=4{,}5,$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=2^2-4{,}5=0{,}5.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 12

Тема: **Расчет характеристик НСВ.**

Дисциплина: ЕН. 03 Теория вероятностей и математическая статистика

Цель практической работы:

Решение задач на вычисление вероятностей и нахождение характеристик для НСВ с помощью функции плотности и интегральной функции распределения. Развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Задачи практической работы:

1.Повторить теоретический материал по теме практической работы.

2.Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.

3.Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Решение задач

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной плотностью распределения f(x) = x на интервале (0;3).

2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной функцией распределения F(x)= $\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \sin 2x \text{ при } 0 < x \le \frac{\pi}{4}, \\ 1 \text{ при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

3. Случайная величина X в интервале (3;5) задана плотностью распределения f(x) = -1,5x^2+ 12x – 22,5;вне этого интервала f(x) = 0. Найти моду величины X.

4. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения

F(x)= $\begin{cases} 0 \text{ при } x \le -2, \\ \frac{1}{4}x + 0{,}5 \text{ при } -2 < x \le 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$

5. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x) = 5x в интервале (0;2); вне этого интервала f(x) = 0. Найти начальные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Самостоятельное решение задач

1.Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной плотностью распределения f(x)= $\frac{1}{2}x$ на интервале (0;2).

2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной функцией распределения F(x)= $\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \cos x \text{ при } 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \text{ при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

3. Случайная величина X в интервале (0;1) задана плотностью распределения f(x)= 3x^2; вне этого интервала f(x) = 0. Найти моду величины X.

4. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения F(x)= $\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ x \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

5. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x) = 4x в интервале (0;3); вне этого интервала f(x) = 0. Найти начальные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 13

Тема: **Решение задач на центральную предельную теорему**

Дисциплина: ЕН. 03 Теория вероятностей и математическая статистика

Цель практической работы:
Закрепить умение решать задачи на вычисление ЦПТ

Задачи практической работы:
1.Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2.Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.
3.Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Пример 1. Вероятность того, что наудачу выбранная деталь окажется бракованной, при каждой проверке одна и та же и равна 0,2. Определить вероятность того, что среди 50 наугад выбранных деталей бракованных окажется не менее 6.
Для того, чтобы воспользоваться теоремой Муавра - Лапласа найдем математическое ожидание и дисперсию количества бракованных деталей в 50 – ти отобранных:

$$m_x = np = 50 \cdot 0{,}2 = 10$$

$$D_x = npq = 50 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 8$$

Фактически в задаче требуется определить вероятность того, что бракованных деталей будет не менее шести, но и, очевидно, не более 50- ти.

$$P(6 \le X \le 50) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{50-10}{\sqrt{16}}\right) - \Phi\left(\frac{6-10}{\sqrt{16}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi(10) + \Phi(1)\right) = 0{,}5 \cdot (1 + 0{,}8427) = 0{,}92135$$

Значения функции Лапласа находятся по таблице. Конечно, значения функции Лапласа Ф(10) в таблице нет, но т. к. в таблицах указано, что Ф(3)=1,0000, то все значения от величин, превышающих 3 также равны 1. Дополнительно см. Функция Лапласа.
Пример 2. Известно, что 60% всего числа изготавливаемых заводом изделий являются изделиями первого сорта. Приемщик берет первые попавшиеся 200 изделий. Чему равна вероятность того, что среди них окажется из от 120 до 150 изделий первого сорта?
Вероятность того, что деталь окажется первого сорта, равна, очевидно, 0,6.
Математическое ожидание числа изделий первого сорта равно:

$$m_x = np = 200 \cdot 0{,}6 = 120$$

По теореме Муавра - Лапласа получаем:

$$P(120 \le X \le 150) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{150-120}{\sqrt{96}}\right) - \Phi\left(\frac{120-120}{\sqrt{96}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi(3{,}0619) + \Phi(0)\right) = 0{,}5 \cdot (1 + 0) = 0{,}5$$

Пример3. Проверкой установлено, что 96% изделий служат не меньше гарантируемого срока. Наугад выбирают 15000 изделий. Найти вероятность того, что со сроком службы менее гарантируемого будет от 570 до 630 изделий.
Вероятность того, что срок службы изделия будет менее гарантированного равна:
1 – 0,96 = 0,04
Математическое ожидание числа таких изделий равно $m_x = np = 15000 \cdot 0{,}04 = 600$
По теореме Муавра - Лапласа получаем:

$$P(570 \le X \le 630) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{630-600}{\sqrt{1152}}\right) - \Phi\left(\frac{570-600}{\sqrt{1152}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi(0{,}88) - \Phi(-0{,}88)\right) =$$

$$= \Phi(0{,}88) = 2\overline{\Phi}(1{,}25) = 2 \cdot 0{,}3944 = 0{,}7888$$

Пример 4.
Среднее количество вызовов, поступающих на коммутатор завода в течении часа, равно

300. Оценить вероятность того, что в течение следующего часа число вызовов на коммутатор:

а) превысит 400;

б) будет не более 500.

Решение

а) По условию $M(X) = 300$. По формуле (6.1.) $P(X > 400) \le \frac{300}{400}$, т.е. вероятность того, что число вызовов превысит 400, будет не более 0,75.

б) По формуле (6.3) $P(X \le 500) \ge 1-\frac{300}{500} = 0{,}4$, т.е. вероятность того, что число вызовов не более 500, будет не менее 0,4.

Пример 5.

Сумма всех вкладов в отделение банка составляет 2 млн. руб., а вероятность того, что случайно взятый вклад не превысит 10 тыс. руб., равна 0,6. Что можно сказать о числе вкладчиков?

Решение

Пусть X – размер случайно взятого вклада, а n – число всех вкладов. Тогда из условия задачи следует, что средний размер вклада $M(X) = \frac{2000}{n}$ тыс.руб. Согласно неравенству Маркова (6.3):

$P(X \le 10) \ge 1-\frac{M(X)}{10}$ или $P(X \le 10) \ge 1-\frac{2000}{10n}$

Учитывая, что $P(X \le 10) = 0{,}6$, получим $1-\frac{200}{n} \le 0{,}6$, откуда $n \le 500$, т.е. число вкладчиков не более 500.

Пример 6.

Средний расход воды на животноводческой ферме составляет 1000 *л* в день, а среднее квадратичное отклонение этой случайной величины не превышает 200 *л.* Оценить вероятность того, что расход воды на ферме в любой выбранный день не превзойдет 2000 *л,* используя:

а) неравенство Маркова;

б) неравенство Чебышева.

Решение

а) Пусть X – расход воды на животноводческой ферме (л). По условию $M(X) = 1000$. Используя неравенство Маркова (6.3), получим $P(X < 2000) > 1*1000/2000 = 0{,}5$, т.е. не менее, чем 0,5.

б) Дисперсия $D($
$X) = a^2 < 200^2$. Так как границы интервала $0 < X < 2000$ симметричны относительно математического ожидания $M(X) = 1000$, то для оценки вероятности искомого события можно применить неравенство Чебышева:

$$P(X \le 2000) = P(0 \le X \le 2000) = P(|X-1000| \le 1000) \ge 1-\frac{200^2}{1000^2} = 0{,}96$$

т.е. не менее, чем 0,96. В данной задаче оценку вероятности события, найденную с помощью неравенства Маркова ($p \ge 0{,}5$), удалось уточнить с помощью неравенства Чебышева (P > 0,96).

Пример 7

Вероятность выхода с автомата стандартной детали равна 0,96. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что число бракованных среди 2000 деталей находится в границах от 60 до 100 (включительно). Уточнить вероятность того же события с помощью интегральной теоремы Муавра-Лапласа. Объяснить различие полученных результатов.

Решение

По условию вероятность того, что деталь бракованная, равна $P = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$. Число бракованных деталей X - m имеет биномиальный закон распределения, а его границы 60 и 100 симметричны относительно математического ожидания $a = M(X) = np = 2000*0{,}04 = 80$.

Следовательно, оценку вероятности искомого события

$$P(60 \le m \le 100) = P(-20 \le m - 80 \le 20) = P(|m - 80| \le 20)$$

можно найти по формуле:

$$P(|m-80| \le 20) \ge 1 - \frac{2000*0{,}04*0{,}96}{20^2} = 1 - \frac{76{,}8}{400} = 0{,}808,$$

т.е. не менее чем 0,808.

Применяя следствие (2.13) интегральной теоремы Муавра-Лапласа, получим

$$P(|m-80| \le 20) \approx \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{76{,}8}}\right) = \Phi(2{,}28) = 0{,}979,$$

т.е. вероятность искомого события приближенно равна 0,979.

Пример 8.

Оценить вероятность того, что отклонение любой случайной величины от ее математического ожидания будет не более трех средних квадратических отклонений (по абсолютной величине) – *(правило трех сигм).*

Решение

По формуле (6.6), учитывая, что $D(X) = \sigma^2$, получим:

$$P(|X - a| \le 3\sigma) \ge 1 - \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{8}{9} = 0{,}889,$$

т.е. не менее, чем 0,889. Напомним, что для нормального закона правило трех сигм выполняется с вероятностью P, равной 0,9973, т.е. $P = 0{,}9973$. Можно показать, что для равномерного закона распределения $P = 1$, для показательного – $P = 0{,}9827$ и т.д. Таким образом, правило трех сигм (с достаточно большой вероятностью его выполнения) применимо для большинства случайных величин, встречающихся на практике.

Пример 9.

По данным примера 2.8 с помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что из 1000 новорожденных доля доживших до 50 лет будет отличаться от вероятности этого события не более, чем на 0,04 (по абсолютной величине).

Решение

Полагая $n = 1000$, $p = 0{,}87$, $q = 0{,}13$, по формуле (6.7):

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le 0{,}04\right) \ge 1 - \frac{0{,}87*0{,}13}{1000*0{,}04^2} = 0{,}929$$

т.е. не менее, чем 0,929.

Пример10.

Для определения средней продолжительности горения электроламп в партии из 200 одинаковых ящиков было взято на выборку по одной лампе из каждого ящика. Оценить вероятность того, что средняя продолжительность горения отобранных 200 электроламп отличается от средней продолжительности горения ламп во всей партии не более чем на 5 ч (по абсолютной величине), если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения ламп в каждом ящике меньше 7 ч.

Решение

Пусть X_i – продолжительность горения электролампы, взятой из i-го ящика (ч). По условию дисперсия $D(X_i) < 7^2 = 49$. Очевидно, что средняя продолжительность горения отобранных ламп равна $(X_1+X_2+...+X_{200})/200$, а средняя продолжительность горения ламп во всей партии $(M(X_1) + M(X_2) +...+M(X_{200}))/200=(a_1+a_2+...+a_{200})/200$.

Тогда вероятность искомого события по формуле (6.12):

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_{200}}{200}-\frac{a_1+a_2+...+a_{200}}{200}\right|\le 5\right)\ge 1-\frac{49}{200*5^2}\approx 0{,}9902,$$

т.е. не менее, чем 0,9902.

Пример 11.

Сколько надо провести измерений данной величины, чтобы с вероятностью не менее 0,95 гарантировать отклонение средней арифметической этих измерений от истинного значения величины не более, чем на 1 (по абсолютной величине), если среднее квадратическое отклонение каждого из измерений не превосходит 5?

Решение

Пусть Xi – результат i-го измерения (i = 1,2,...,n); a – истинное значение величины, т.е. $M(Xj) = a$ при любом i. Необходимо найти n, при котором

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-a\right|\le 1\right)\ge 0{,}95$$

В соответствии с (6.12) данное неравенство будет выполняться, если

$1-\frac{C}{n\varepsilon^2}=1-\frac{5^2}{n*1^2}\ge 0{,}95$, откуда $\frac{25}{n}\le 0{,}05$ и $n\ge\frac{25}{0{,}05}=500$,

т.е. потребуется не менее 500 измерений.

Тест № 5 «Случайная величина»

1.Случайная величина это:

а. величина, которая принимает то или иное значение, неизвестно заранее какое;

б. факт, который может произойти или не произойти.

2.Закон распределения дискретной случайной величины это:

- а. ряд распределения вероятностей;
- б. многоугольник распределения;
- в. плотность распределения.

3.Функция распределения это:

- а. вероятность того, что X <x;
- б. вероятность того, что X=x;
- в. вероятность того, что X>x.

4. Плотность распределения случайной величины это:

- а. характеристика для непрерывных случайных величин;
- б. характеристика для дискретных случайных величин;
- в. характеристика для комбинированных случайных величин.

5. Числовые характеристики случайных величин. Характеристики положения:

- а. математическое ожидание, мода, медиана;
- б. коэффициент асимметрии, эксцесс, сигма.

6. Мода вариационного ряда 3,4,5,6,10,10,12 равна

- а. 6;

б. 10;
в. 12;
г. 3.

6. Числовые характеристики случайных величин. Центральные моменты, дисперсия это:
а. характеристики положения;
б. характеристики рассеивания.

Тест № 6 «Законы распределения вероятностей»

1. Биномиальный ЗРВ это:
а. формула Бернулли;
б. формула Гаусса;
в. формула Пуассона;
г. формула Муавра –Лапласа.

2. Распределение Пуассона это:
а. многопараметрическое распределение вероятностей;
б. однопараметрическое распределение вероятностей.

3. Замечательное свойство распределения Пуассона это:
а. математическое ожидание случайной величины равно дисперсии;
б. математическое ожидание равно среднеквадратическому значению.

4. Равномерным распределением случайной величины называется:
а. постоянная плотность распределения вероятностей на определенном интервале значений случайной величины;
б. непостоянная плотность распределения.

5. Показательное (экспоненциальное) распределение это:
а. многопараметрическое распределение вероятностей;
б. однопараметрическое распределение вероятностей.

6. Замечательное свойство показательного распределения это:
а. математическое ожидание случайной величины равно дисперсии;
б. математическое ожидание равно среднеквадратическому значению.

7. Нормальное распределение случайных величин это:
а. многопараметрическое распределение вероятностей;
б. однопараметрическое распределение вероятностей.

8. Является ли интеграл вероятности функцией распределения?:
а. да;
б. нет.

9. Чему равна вероятность попадания нормально распределенной случайной величины, относительно математического ожидания, в интервал плюс, минус 3 сигма?:
а. 0,9973;
б. 0,5984;
в. 0,0027.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Методические рекомендации разработаны в соответствии с программой учебной дисциплины ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика и предназначены для обучающихся специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование».

Самостоятельная работа выполняется обучающимся по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа обучающихся, оказывающая эффективное влияние на формирование личности будущего специалиста, планируется обучающимся самостоятельно. Каждый обучающийся сам определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет самостоятельную работу по личному, индивидуальному плану, в зависимости от его подготовки, располагаемого времени и других условий.

Во время самостоятельной подготовки обучающиеся должны быть обеспечены доступом к современным профессиональным базам данных, к информационным ресурсам сети Интернет.

Объем времени, отведенный на самостоятельную работу, представляет собой логическое продолжение аудиторных занятий.

В ходе самостоятельной работы при изучении дисциплины ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика обучающимся рекомендуется обратить внимание на следующие основные вопросы:

1. Упорядоченные выборки (размещения).
2. Правило произведения размещения.
3. Размещения и сочетания с повторениями.
4. Случайные события.
5. Вероятности сложных событий.
6. Пространство элементарных событий.
7. Геометрическое распределение
8. Функция плотности распределения
9. Понятие НСВ.
10. Интегральная функция распределения НСВ.
11. Нормальное распределение.
12. Показательное распределение.
13. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины.
14. Центральная предельная теорема.
15. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева.
16. Генеральная совокупность и выборка.
17. Понятие точечной оценки.
18. Моделирование сложных испытаний
19. Сущность метода статистических испытаний.
20. Моделирование случайных величин.

При изучении дисциплины ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика рекомендуется следующая последовательность обучения: вначале обучающимся необходимо ознакомиться и проработать учебный материал по учебникам и лекциям, затем следует обратиться к дополнительной литературе.

ЦЕЛИ ВНЕАУДИТОРНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

уметь:

– собирать и регистрировать статистическую информацию;
– проводить первичную обработку и контроль материалов наблюдения;
– рассчитывать вероятности событий, статистические показатели и формулировать основные выводы;
– записывать распределения и находить характеристики случайных величин;
– применять стандартные методы модели к решению вероятностных и математических статистических задач;
– пользоваться расчетными формулами, таблицами, графиками при решении статистических задач;
– применять современные пакеты прикладных программ статистического анализа.

знать:

– основные понятия комбинаторики;
– основы теории вероятностей и математической статистики;
– методику моделирования случайных величин, метод статистических испытаний;
– статистические оценки параметров распределения по выборочным данным.

ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ЕН.03 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

– Подготовка рефератов (докладов, сообщений, эссе)
– Составление схем
– Решение практических заданий
– Составление и решение тестовых заданий
– Подготовка ответов на контрольные вопросы
– Систематическая проработка конспектов занятий, учебной и специальной юридической литературы (по вопросам к параграфам, главам учебных пособий, составленным преподавателем).

РАБОТА С ТЕКСТОМ НПА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПРАВОЧНО-ПРАВОВЫХ СИСТЕМ, ПРЕДОСТАВЛЕННЫХ СЕТЬЮ INTERNET.

Во время самостоятельной деятельности, в процессе лекционных и семинарских занятий у обучающихся формируются навыки работы с нормативно-правовыми актами, регулирующими рациональное использование природных ресурсов и защиту окружающей природной среды.

Прежде чем приступить к анализу первоисточника, необходимо прочитать документ, получить представление о его структуре. Это первый аспект работы с текстом правового документа. Второй аспект представляет собой запись основных положений и идей первоисточника.

Обучающиеся в ходе работы с правовым актом воспроизводят отдельные положения текста, осуществляют его анализ.

Особое внимание следует обратить на встречающиеся в первоисточнике экологические термины. Без усвоения основных терминов невозможно эффективное изучение правового источника, его понимание.

После ознакомления с текстом и терминами следует приступить к выполнению поставленного задания. На данном этапе обучающиеся самостоятельно ищут ответы на поставленные перед ними вопросы. Эта деятельность помогает развитию умения структурировать информацию, выделять основные моменты.

В результате систематической работы с текстом нормативно-правового акта у обучающегося развивается умение самостоятельно вести поиск правовой базы, уяснять смысл правовых терминов, использовать их в практической работе.

Для того чтобы обучающийся имел постоянный доступ к НПА он может использовать сеть Internet.

Одним из эффективных путей совершенствования самостоятельной работы является использование обучающимся Интернет-ресурсов, основными достоинствами которых являются:

– реализации принципа индивидуальной работы;

– наличие быстрой обратной связи; большие возможности наглядного предъявления материала; активность обучающихся; креативность.

Кроме того, одним из достоинств Интернета является предоставление бесплатного доступа к справочно-правовым системам.

На сегодняшний день в России и СНГ существует множество справочно-правовых систем, основные среди них:

– Гарант, КонсультантПлюс, Кодекс; Референт Государственные системы;

– Информационно-поисковая система «Закон» (ИПС «Закон»), Научно- технический центр правовой информации «Система» (НТЦ «Система»);

– Федеральное бюджетное государственное учреждение «Научный центр правовой информации при Министерстве юстиции Российской Федерации»;

– (http://www.scli.ru/bd)., Информационно-правовая система «Законодательство России» (http: //pravo. gov. ru/ip s. html).

Все это позволяет обучающемуся найти необходимый НПА в действующей редакции, с актуальными изменениями в законодательстве.

ВНЕАУДИТОРНАЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ЕН.03 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

№ п/п	Тема самостоятельной работы	Кол-во часов	Вид самостоятельной работы	Результат работы	Сроки выполнения
1	**Тема 7.8** Проверка умений и навыков	4	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Подготовка ответов на контрольные вопросы.	Устные ответы на вопросы	на практическое занятие
	4	**2**			

Общие методические рекомендации по работе с текстом

Умения работать с заголовком учебного текста, информацией:

- ✓ формулировать вопросы к заголовку;
- ✓ выделять какими знаниями, умениями по данной теме уже владеете;
- ✓ установить, почему именно эти слова вынесены в заголовок;
- ✓ предвосхищать, что из ранее неизвестного может открыться;
- ✓ осознать, что неизвестно по этой теме;
- ✓ переформулировать заголовок в форму вопроса.

Умения, необходимые для структурирования информации:

- ✓ делить информацию на относительно самостоятельные смысловые части;
- ✓ выделять в смысловой части главное (с точки зрения поставленной учебной задачи) и вспомогательное, новое и уже знакомое;
- ✓ выделять в смысловой части, о чем говорится (объект) и что о нем говорится;
- ✓ оценивать информативную значимость выделенных мыслей - соотносить их с теми или иными категориями содержательной структуры информации (фактами, явлениями, понятиями, законами, теориями);
- ✓ определять логические и содержательные связи и отношения между мыслями информации;
- ✓ выделять «смысловые и опорные пункты», элементы информации, несущие основную смысловую нагрузку (термины, понятия, формулы, рисунки и др.)
- ✓ группировать по смыслу выделенные при анализе информации мысли, объединяя их в более крупные части;
- ✓ формулировать главные мысли этих частей, всей информации;
- ✓ обобщать то, что в тексте дано конкретно;
- ✓ конкретизировать то, что дано обобщено;
- ✓ доказывать, аргументировать то, что не доказано, но требует доказательства;
- ✓ выделять трудное, непонятное;
- ✓ формулировать вопрос по учебной информации;
- ✓ выделять противоречия с ранее известным, с собственным опытом;
- ✓ соотносить результаты изучения с поставленными целями, вопросами;
- ✓ синтезировать информацию, полученную из разных источников.

Умения письменной фиксации результатов работы с учебной информацией:

- ✓ составлять план (простой или сложный), отражать информацию графически;
- ✓ отражать содержание информации тезисно;
- ✓ составлять конспект (следящий, структурный и др.)

Коммуникативные умения:

- ✓ устно характеризовать систему вопросов, освещенных в учебной информации;
- ✓ тезисно излагать содержание информации;
- ✓ развернуто излагать содержание.

Умения контролировать свою работу с учебной информацией:

- ✓ воспроизводить изученное;

- ✓ составлять тезаурус понятий темы;
- ✓ подбирать, конструировать задания на применение изученного;
- ✓ приводить собственные примеры;
- ✓ устанавливать связи изученного с ранее известным.

Общие методические рекомендации для оформления и написания реферата

«Реферат» имеет латинские корни и в дословном переводе означает «докладываю, сообщаю». Словари определяют его значение как «краткое изложение в письменном виде или в форме публичного доклада содержания книги, учения, научной проблемы, результатов научного исследования: доклад на определенную тему, освещающий ее на основе обзора литературы и других источников.

1. Студенческий реферат – это творческая работа студента, в которой на основании краткого письменного изложения и оценки различных источников проводится самостоятельное исследование определенной темы, проблемы.

2. Реферат отличают следующие признаки:

а) реферат не копирует дословно содержание первоисточника, а представляет собой новый вторичный текст, создаваемый в результате систематизации и обобщения материал первоисточника, его аналитико-синтетической переработки («аналитико-синтетическая переработка первичного документа с целью создания вторичного») (ГОСТ Р ИСО 10011-2-93)

б) будучи вторичным текстом, реферат создается со всеми требованиями, предъявляемыми к связному высказыванию, то есть ему должны быть присущи следующие черты: целостность, связность, структурная упорядоченность и завершенность.

в) в реферат должно быть включено самостоятельное мини-исследование, осуществляемое на материале или художественных текстов, или источников по теории и истории литературы.

3. Студенческий реферат должен иметь следующую структуру:

- ✓ титульный лист
- ✓ план работы (содержание)
- ✓ введение
- ✓ основная часть
- ✓ заключение
- ✓ список литературы
- ✓ приложение (по необходимости)

Во введении, как правило, дается краткая характеристика изучаемой темы, обосновывается ее актуальность, раскрываются цель и задачи работы, производится краткий обзор литературы и важнейших источников, на основании которых готовился реферат.

В основной части кратко, но полно излагается материал по разделам, каждый из которых раскрывает свою проблему или разные стороны одной проблемы. Каждый смысловой блок (глава, параграф) должен быть озаглавлен.

Заключение должно быть четким, кратким, вытекающим из содержания основной части. В нем должны содержаться выводы по результатам работы, а также информация о согласии или несогласии с авторами цитируемых работ, даны указания на то, кому могут быть интересны книги, тексты, рассмотренные в реферате. Заключение не должно превышать по объему введения.

4. Объем реферата жестко не регламентируется, однако он не должен превышать 20 машинописных страниц.

5. Требования к оформлению:

Реферат должен быть написан на бумаге стандартной формы (лист 4А, с полями слева 2,5 – 3 см, сверху и снизу – 2 см, справа – до 1 см) и вложен в папку.

Нумерация страниц должна быть сквозной, включая список используемой литературы и приложения. Нумеруют страницы арабскими цифрами в правом нижнем углу или сверху посредине листа. Первой страницей является титульный лист, на нём номер страницы не ставится.

Схема оформления титульного листа (приложение 1), содержания (приложение 2) студенческого реферата прилагается.

Список литературы завершает работу. В нем фиксируются источники, с которыми работал автор реферата. Список составляется в алфавитном порядке по фамилиям авторов или заглавия книг. При наличии нескольких работ одного автора их названия располагаются по годам изданий. Библиографические данные оформляются в соответствии с ГОСТом.

Общие методические рекомендации для оформления сообщения, доклада

Объем сообщения обычно составляет 2-3 страницы формата А-4

Сообщение, доклад оформляют стандартно:

Шаблонный машинописный текст имеет следующие параметры:

- ✓ шрифт Times New Roman;
- ✓ размер шрифта 14;
- ✓ межстрочный интервал 1,5;
- ✓ стандартные поля для редактора Word;
- ✓ выравнивание по ширине.

Ссылки на источники указываются по требованию преподавателя.

В идеале, сообщение, доклад еще должны содержать приложения – таблицы, схемы, копии документов – однако, чаще это не практикуется.

Общие методические рекомендации для оформления презентации.
Требования к презентации

На первом слайде размещается:

- ✓ название презентации;
- ✓ автор: ФИО, группа, название учебного учреждения (соавторы указываются в алфавитном порядке);
- ✓ год.

На втором слайде указывается содержание работы, которое лучше оформить в виде гиперссылок (для интерактивности презентации).

На последнем слайде указывается список используемой литературы в соответствии с требованиями, интернет-ресурсы указываются в последнюю очередь.

Оформление слайдов	
Стиль	⏩ необходимо соблюдать единый стиль оформления; ⏩ нужно избегать стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; ⏩ вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки)
Фон	⏩ для фона выбираются более холодные тона (синий или зеленый)
Использование цвета	⏩ на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: один для фона, один для заголовков, один для текста;

	⏩ для фона и текста используются контрастные цвета; ⏩ особое внимание следует обратить на цвет гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	⏩ нужно использовать возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде; ⏩ не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами; анимационные эффекты не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде
Представление информации	
Содержание информации	⏩ следует использовать короткие слова и предложения; ⏩ время глаголов должно быть везде одинаковым; ⏩ следует использовать минимум предлогов, наречий, прилагательных; ⏩ заголовки должны привлекать внимание аудитории
	⏩ предпочтительно горизонтальное расположение информации; ⏩ наиболее важная информация должна располагаться в центре эк рана; ⏩ если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней.
Шрифты	⏩ для заголовков не менее 24; ⏩ для остальной информации не менее 18; ⏩ шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; ⏩ нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; ⏩ для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание того же типа; ⏩ нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже, чем строчные).
Способы выделения информации	Следует использовать: ⏩ рамки, границы, заливку ⏩ разные цвета шрифтов, штриховку, стрелки ⏩ рисунки, диаграммы, схемы для иллюстрации наиболее важных фактов
Объем информации	⏩ не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации: люди могут единовременно запомнить не более трех фактов, выводов, определений. ⏩ наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отражаются по одному на каждом отдельном слайде.
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: с текстом, с таблицами, с диаграммами.

Критерии оценки по видам работ

1. Критерии оценки подготовки информационного сообщения
   - актуальность темы;
   - соответствие содержания теме;
   - глубина проработки материала;

- грамотность и полнота использования источников;
- наличие элементов наглядности.

2. Критерии оценки подготовки реферата
   - актуальность темы;
   - соответствие содержания теме;
   - глубина проработки материала;
   - грамотность и полнота использования источников;
   - соответствие оформления реферата требованиям.

3. Критерии оценки составления опорного конспекта
   - соответствие содержания теме;
   - правильная структурированность информации;
   - наличие логической связи изложенной информации;
   - соответствие оформления требованиям;
   - аккуратность и грамотность изложения;
   - работа сдана в срок.

4. Критерии оценки составления опорно-логической схемы по теме
   - соответствие содержания теме;
   - логичность структуры таблицы;
   - правильный отбор информации;
   - наличие обобщающего (систематизирующего, структурирующего, сравнительного) характера изложения информации;
   - соответствие оформления требованиям;
   - работа сдана в срок.

5. Критерии оценки создания материалов-презентаций
   - соответствие содержания теме;
   - правильная структурированность информации;
   - наличие логической связи изложенной информации;
   - эстетичность оформления, его соответствие требованиям;
   - работа представлена в срок.

Критерии оценки самостоятельной внеаудиторной работы студентов

Качество выполнения внеаудиторной самостоятельной работы студентов оценивается посредством текущего контроля самостоятельной работы студентов с использованием балльно-рейтинговой системы. Текущий контроль СРС – это форма планомерного контроля качества и объема, приобретаемых студентом компетенций в процессе изучения дисциплины, проводится на практических и семинарских занятиях и во время консультаций преподавателя.

100~89% Максимальное количество баллов, указанное в карте-маршруте (табл. 1) самостоятельной работы студента по каждому виду задания, студент получает, если:
• обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему;
• дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов;
• может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры;
•правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания студентом данного материала.

70~89% от максимального количества баллов студент получает, если:
•неполно (не менее 70% от полного), но правильно изложено задание;

•при изложении были допущены 1-2 несущественные ошибки, которые он исправляет после замечания преподавателя;
•дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов;
•может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры;
•правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания студентом данного материала.

50~69% от максимального количества баллов студент получает, если:
•неполно (не менее 50% от полного), но правильно изложено задание;
•при изложении была допущена 1 существенная ошибка;
•знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировке понятий;
•излагает выполнение задания недостаточно логично и последовательно;
•затрудняется при ответах на вопросы преподавателя.

49% и менее от максимального количества баллов студент получает, если:
•неполно (менее 50% от полного) изложено задание;
•при изложении были допущены существенные ошибки.

В "0" баллов преподаватель вправе оценить выполненное студентом задание, если оно не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Сумма полученных баллов по всем видам заданий внеаудиторной самостоятельной работы составляет рейтинговый показатель студента. Рейтинговый показатель студента влияет на выставление итоговой оценки по результатам изучения дисциплины.

Таблица перевода баллов в оценку

балл	100~89%	70~89%	50~69%	49% и менее
оценка	5 (отл.)	4 (хор.)	3 (удов.)	2 (неудов.)

1.

ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОБУЧЕНИЯ

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Основные источники:

1. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. – 2-е изд., испр. и перераб. – Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2020. – 240 с. – (Среднее профессиональное образование). – ISBN 978-5-16-105582-3. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1059112.

2. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / Л.Г. Бирюкова, Г.И. Бобрик, Р.В. Сагитов [и др.]; под ред. В.И. Матвеева. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: ИНФРА-М, 2020. – 289 с. – (Среднее профессиональное образование). – ISBN 978-5-16-015712-2. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1047921.

3.Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Е.А. Коган, А.А. Юрченко. – Москва: ИНФРА-М, 2020. – 250 с. – (Среднее профессиональное образование). – ISBN 978-5-16-015649-1. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1044968.

Дополнительная литература:

1. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и методам оптимизации: учебное пособие / А.Г. Бычков. – Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2022. – 192 с. – (Среднее профессиональное образование). – ISBN 978-5-00091-566-0. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1834678.

2. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и методам оптимизации: учеб. пособие / А.Г. Бычков. – Москва: Форум: ИНФРА-М, 2019. – 192 с. – (Среднее профессиональное образование). – ISBN 978-5-16-106570-9. – URL: https://znanium. com/catalog/product/961820.

Интернет-ресурсы: Перечень Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине, используются следующие электронные библиотечные системы (ЭБС):

1. https://znanium.com/
2. http://urait.ru//
3. https://e.lanbook.com/

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине, используются следующие профессиональные базы данных:

1. Общероссийский математический портал www.mathnet.ru
2. Матбюро: решения задач по высшей математике www.matburo.ru
3. Электронная библиотека учебных материалов www.nehudlit.ru.
4. Математический сайт http://www.math.ru/.

Приложение 1

Образец титульного листа

АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «СЕВЕРО - КАВКАЗСКИЙ АКАДЕМИЧЕСКИЙ МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ» (АНО ПО «СКАМК»)

РЕФЕРАТ

на тему____

по дисциплине__________________________________
(наименование дисциплины)

ВЫПОЛНИЛ:
____
(Ф.И.О)
____
(курс, группа)

ПРОВЕРИЛ:
____
(Ф.И.О., преподавателя)

г. Ставрополь, 2022

Приложение 2

Образец Содержания

СОДЕРЖАНИЕ

Приложение 3

Образец оформления презентации

1. Первый слайд:

Тема информационного сообщения (или иного вида задания): ______________________________
Подготовил: Ф.И.О. студента, курс, группа, специальность Руководитель: Ф.И.О. преподавателя

2. Второй слайд

План: 1. ______________________. 2. ______________________. 3. ______________________.

3. Третий слайд

Литература:

4. Четвертый слайд

Лаконично раскрывает содержание информации, можно включать рисунки, автофигуры, графики, диаграммы и другие способы наглядного отображения информации