АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ АКАДЕМИЧЕСКИЙ МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»
(АНО ПО «СКАМК»)

УТВЕРЖДАЮ
Директор АНО ПО «СКАМК»
__________ З.Р. Кочкарова
«14» мая 2025 года

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
ЕН.03 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Специальность
09.02.07 Информационные системы и программирование

Программа подготовки
базовая

Форма обучения
очная

г. Ставрополь

Фонд оценочных средств составлен с учетом Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 09.12.2016 г. № 1547.

Фонд оценочных средств предназначен для преподавания дисциплин математического и общего естественнонаучного цикла обучающимся очной формы обучения по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

Организация – разработчик: Автономная некоммерческая организация профессионального образования «Северо-Кавказский академический многопрофильный колледж», город Ставрополь.

Содержание

1. Паспорт фонда оценочных средств

1.1 Область применения

Комплект фонда оценочных средств предназначен для проверки результатов освоения учебной дисциплины ЕН.03Теория вероятностей и математическая статистика, программы подготовки специалиста среднего звена по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

В результате освоения дисциплины ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика, обучающийся должен **уметь**:

- собирать и регистрировать статистическую информацию;
- проводить первичную обработку и контроль материалов наблюдения;
- рассчитывать вероятности событий, статистические показатели и формулировать основные выводы;
- записывать распределения и находить характеристики случайных величин;
- применять стандартные методы модели к решению вероятностных и математических статистических задач;
- пользоваться расчетными формулами, таблицами, графиками при решении статистических задач;
- применять современные пакеты прикладных программ статистического анализа.

В результате освоения дисциплины Теория вероятностей и математическая статистика, обучающийся должен **знать**:

- основные понятия комбинаторики;
- основы теории вероятностей и математической статистики;
- методику моделирования случайных величин, метод статистических испытаний;
- статистические оценки параметров распределения по выборочным данным.

Комплект фонда оценочных средств позволяет оценивать освоенные умения, усвоенные знания

Результаты обучения (освоенные умения, усвоенные знания)	Формы и методы контроля и оценки результатов обучения
уметь: - собирать и регистрировать статистическую информацию; - проводить первичную обработку и контроль материалов наблюдения; - рассчитывать вероятности событий, статистические показатели и формулировать основные выводы; - записывать распределения и находить характеристики случайных величин; - применять стандартные методы модели к решению вероятностных и математических статистических задач; - пользоваться расчетными формулами, таблицами, графиками при решении статистических задач; - применять современные пакеты прикладных	Отчет по практической работе, Отчет по самостоятельной работе, Дифференцированный зачет

программ статистического анализа.	
знать: - основные понятия комбинаторики; - основы теории вероятностей и математической статистики; - методику моделирования случайных величин, метод статистических испытаний; - статистические оценки параметров распределения по выборочным данным.	Отчет по практической работе, Отчет по самостоятельной работе, Дифференцированный зачет

1.2 Система контроля и оценки освоения программы учебной дисциплины ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика

Наименование темы, раздела	Форма контроля
Раздел 1. Элементы комбинаторики	
Тема 1.1 Предмет теории вероятностей и математической статистики	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала
Тема 1. 2 Упорядоченные выборки	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала
Тема 1.3. Решение задач	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 1.4 Размещения и сочетания	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала
Тема 1.5 Неупорядоченные выборки	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала
Тема 1.6 Решение задач	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 1.7 Решение задач	Отчет по контрольной работе Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Раздел 2. Основы теории вероятности	
Тема 2.1 Случайные события	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала
Тема 2.2 Вероятности сложных событий	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала
Тема 2.3 Вычисление вероятностей событий	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала,

	- решение задач
Тема 2.4 Вычисление вероятностей сложных событий	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 2.5 Пространство элементарных событий	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала
Тема 2.6 Вычисление вероятностей событий в схеме Бернулли	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала,
Тема 2.7 Вычисление вероятностей событий в схеме Бернулли	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 2.8 Вычисление вероятности по формуле Байеса	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала
Раздел 3. Дискретные случайные величины (ДСВ)	
Тема 3.1 Понятие ДСВ	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала
Тема 3.2 Функция плотности распределения	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала
Тема 3.3 Решение задач	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 3.4 Вычисление характеристик ДСВ	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 3.5 Проверка умений и навыков	Отчет по контрольной й работе: Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала
Раздел 4. Непрерывные случайные величины (НСВ).	
Тема4.1 Понятие НСВ	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала,
Тема 4.2 Решение задач	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач.
Тема 4.3 Функция плотности НСВ	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала

Тема 4.4 Вычисление вероятностей	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала
Тема 4.5 Вычисление вероятностей	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 4.6 Нормальное распределение. Показательное распределение	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 4.7 Вычисление вероятностей	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 4.8 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 4.9 Расчет характеристик НСВ.	Отчет по контрольной работе Отчет по самостоятельной работе: Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Раздел 5. Центральная предельная теорема. Закон больших чисел. Вероятность и частота	
Тема 5.1 Центральная предельная теорема.	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала
Тема 5.2 Решение задач	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 5.3 Решение задач	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 5.4 Неравенство Чебышева	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала
Тема 5.5 Решение задач	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала,

	- решение задач
Тема 5.6 Неравенство Чебышева и его применении	Отчет по контрольной работе: Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Раздел 6. Выборочный метод. Статистические оценки параметров распределения	
Тема 6.1 Генеральная совокупность и выборка	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала
Тема 6.2 Построение графической диаграммы	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 6.3 Понятие точечной оценки	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 6.4 Расчёт числовых характеристик	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 6.5 Интервальная оценка	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 6.6 Интервальное оценивание математического ожидания	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 6.7 Точечная оценка вероятности события Закрепление материала	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 6.8 Проверка умений и навыков	Отчет по контрольной работе Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Раздел 7 Моделирование случайных величин	
Тема 7.1 Примеры моделирования случайных	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 7.2 Моделирование сложных испытаний и их результатов	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 7.3 Сущность метода статистических испытаний	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 7.4 Моделирование случайных величин	Отчет по практической работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач. Отчет по самостоятельной работе:

	- устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 7.5 Моделирование случайных величин	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 7.6 Моделирование ДСВ	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 7.7 Моделирование НСВ	Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала, - решение задач
Тема 7.8 Проверка умений и навыков	Отчет по контрольной работе Отчет по самостоятельной работе: - устные ответы по вопросам лекционного материала,

1.2.1 Формы итоговой аттестации по ППССЗ при освоении учебной дисциплины

Итоговый контроль освоенных умений и усвоенных знаний по дисциплине ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика осуществляется в форме дифференцированного зачета.

1.2.2 Организация контроля и оценки освоения программы учебной дисциплины

К дифференцированному зачету допускается обучающийся, изучивший теоретическую часть.

2. Комплект материалов для оценки освоенных умений и усвоенных знаний по учебной дисциплине ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика

2.1 Задания для экзаменующихся

Оцениваемые умения:

- собирать и регистрировать статистическую информацию;
- проводить первичную обработку и контроль материалов наблюдения;
- рассчитывать вероятности событий, статистические показатели и формулировать основные выводы;
- записывать распределения и находить характеристики случайных величин;
- применять стандартные методы модели к решению вероятностных и математических статистических задач;
- пользоваться расчетными формулами, таблицами, графиками при решении статистических задач;
- применять современные пакеты прикладных программ статистического анализа.

Оцениваемые знания:

- основные понятия комбинаторики;
- основы теории вероятностей и математической статистики;
- методику моделирования случайных величин, метод статистических испытаний;
- статистические оценки параметров распределения по выборочным данным.

2.1.1Задания практической части

Тема: Решение задач на расчёт количества выборок

Содержание и последовательность выполнения заданий

Решение задач у доски

1. В ювелирную мастерскую привезли 6 изумрудов, 9 алмазов и 7 сапфиров. Ювелиру заказали браслет, в котором 3 изумруда, 5 алмазов и 2 сапфиров. Сколькими способами он может выбрать камни на браслет?

2. Пете на день рождения подарили 7 новых дисков с играми, а Вале папа привез 9 дисков из командировки. Сколькими способами они могут обменять 4 любых диска одного на 4 диска другого?

3. Группа из двадцати юношей разделяется на три группы, в первую из которых входят три человека, во вторую — пять и в третью — двенадцать. Сколькими способами они могут это сделать?

4. В шахматном кружке 12 юношей и 8 девушек. Для участия в соревнованиях из них нужно составить команду, в которую должны войти 9 юношей и 3 девушки. Сколькими способами это можно сделать?

Индивидуальное задание.

1 вариант

1. В ящике 7 болтов и 15 винтиков разных размеров. Нужно подобрать два болта и три винтика. Сколькими вариантами это можно сделать?

2. Из 4 первокурсников, 5 второкурсников и 6 третьекурсников надо выбрать 3 студента на конференцию. Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если среди выбранных должны быть студенты разных курсов?

3. Сколько существует способов поставить на книжную полку в беспорядке собрание сочинений, состоящее из семи томов?

2 вариант

1. В школе олимпийского резерва обучаются 12 лыжников и 15 конькобежцев. Сколько существует способов сформировать из них команду на соревнования по зимним видам спорта, в которую должны войти три лыжника и четыре конькобежца?
2. Сколькими способами можно распределить 15 выпускников по трём районам, если в одном из них имеется 8, в другом -5 и в третьем – 2 вакантных места?
3. В электричке 12 вагонов. Сколько существует способов размещения 4 пассажиров, если в вагоне должно быть не более одного пассажира?

3 вариант

1. В ящике 20 шаров, среди которых 12 белых, остальные голубые. Сколькими способами из них можно выбрать 3 белых и два голубых шара.
2. Из 15 красных и 7 белых гладиолусов формируются букеты. Сколькими способами можно составить букеты из четырёх красных и трёх белых гладиолусов?
3. Сколько различных спортивных прогнозов могут дать болельщики перед началом первенства по футболу, если в высшей лиге участвуют 15 команд и разыгрывается три медали: золотая, серебряная, бронзовая?

4 вариант

1. В группе 20 юношей и 10 девушек. Сколькими способами можно выбрать трёх юношей и двух девушек для участия в слёте студентов?
2. Компания имеет четыре отдела: производственный, снабжения, менеджмента и маркетинга. Количество людей в отделах 25, 36, 24 и 15 соответственно. Каждый отдел собирается послать одного представителя на ежегодную встречу с директором. Сколько различных групп можно составить из числа работников компании?
3. По сведения геологоразведки, один из 12 участков земли может содержать нефть. Однако компания имеет средства для бурения только семи скважин. Сколько способов отбора для бурения имеется у компании?

Контрольные вопросы

1. Когда количество способов в задаче нужно перемножать?
2. Придумайте свою задачу на комбинаторный принцип умножения.

Тема: Решение задач с использованием правила суммы, правила произведения

Содержание и последовательность выполнения заданий

Данные правила весьма напоминают алгебру событий.

1) Знак «плюс» следует понимать и читать как союз **ИЛИ**.

Задача 1.

Студенческая группа состоит из 23 человек, среди которых 10 юношей и 13 девушек. Сколькими способами можно выбрать двух человек одного пола?

Решение: в данном случае подсчёт C_{23}^{2} не годится, поскольку общее количество сочетаний включает в себя и разнополые пары.

Условие «выбрать двух человек одного пола» подразумевает, что необходимо выбрать двух юношей **или** двух девушек, и уже сама словесная формулировка указывает на верный путь решения:

$C_{10}^2 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ способами можно выбрать 2 юношей; $C_{13}^2 = \frac{13!}{11! \cdot 2!} = \frac{11! \cdot 12 \cdot 13}{11! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$ способами можно выбрать 2 девушек.

Таким образом, двух человек одного пола (без разницы – юношей **или** девушек) можно выбрать: $C_{10}^2 + C_{13}^2 = 45 + 78 = 123$ способами.

Ответ: 123

Правило умножения комбинаций:

2) <u>Знак «умножить» следует понимать и читать как союз **И**</u>.

Рассмотрим ту же студенческую группу, которая пошла на танцы. Сколькими способами можно составить пару из юноши и девушки?

$C_{10}^1 = 10$ способами можно выбрать 1 юношу; $C_{13}^1 = 13$ способами можно выбрать 1 девушку.

Таким образом, одного юношу **и** одну девушку можно выбрать: $C_{10}^1 \cdot C_{13}^1 = 10 \cdot 13 = 130$ способами.

Когда из каждого множества выбирается по 1 объекту, то справедлив следующий принцип подсчёта комбинаций: «**каждый** объект из одного множества может составить пару **с каждым** объектом другого множества».

То есть, Олег может пригласить на танец любую из 13 девушек, Евгений – тоже любую из тринадцати, и аналогичный выбор есть у остальных молодых людей. Итого: $10 \cdot 13 = 130$ возможных пар.

Следует отметить, что в данном примере не имеет значения «история» образования пары; однако если принять во внимание инициативу, то количество комбинаций нужно удвоить, поскольку каждая из 13 девушек тоже может пригласить на танец любого юношу. Всё зависит от условия той или иной задачи!

Похожий принцип справедлив и для более сложных комбинаций, например: сколькими способами можно выбрать двух юношей **и** двух девушек для участия в сценке КВН?

Союз **И** недвусмысленно намекает, что комбинации необходимо перемножить:

$C_{10}^2 \cdot C_{13}^2 = 45 \cdot 78 = 3510$ возможных групп артистов.

Иными словами, **каждая** пара юношей (45 уникальных пар) может выступать с **любой** парой девушек (78 уникальных пар). А если рассмотреть распределение ролей между участниками, то комбинаций будет ещё больше. …

Правило умножения комбинаций распространяется и на большее количество множителей:

Задача 2.

Сколько существует трёхзначных чисел, которые делятся на 5?

Решение: для наглядности обозначим данное число тремя звёздочками: *****

Комбинации будем считать по разрядам – *слева направо*:

В *разряд сотен* можно записать любую из $C_9^1 = 9$ цифр (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9). Ноль не годится, так как в этом случае число перестаёт быть трёхзначным.

А вот в *разряд десятков* («посерединке») можно выбрать любую из 10 цифр: $C_{10}^1 = 10$.

По условию, число должно делиться на 5. Число делится на 5, если оно заканчивается на 5 либо на 0. Таким образом, в младшем разряде нас устраивают 2 цифры.

Итого, существует: $C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot 2 = 9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$ трёхзначных чисел, которые делятся на 5.

При этом произведение $C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot 2$ расшифровывается так: «9 способами можно выбрать цифру в *разряд сотен* **и** 10 способами выбрать цифру в *разряд десятков* **и** 2 способами в *разряд единиц*»

Или ещё проще: «**каждая** из 9 цифр в *разряде сотен* комбинируется **с каждой** из 10 цифр *разряда десятков* **и с каждой** из двух цифр в *разряде единиц*».

Ответ: 180

Задача 3.

Сколько существует выигрышных комбинаций из 2 карт при игре в «очко»?

Решение*:*

$C_4^1 \cdot C_4^1 = 4 \cdot 4 = 16$ способами может быть сдана десятка и туз («каждая десятка с каждым тузом»);

$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$ способами может быть сдана пара тузов.

Итого: $C_4^1 \cdot C_4^1 + C_4^2 = 16 + 6 = 22$ выигрышные комбинации.

Ответ: 22

Задача 4.

У Васи дома живут 4 кота.

а) сколькими способами можно рассадить котов по углам комнаты?
б) сколькими способами можно отпустить гулять котов?
в) сколькими способами Вася может взять на руки двух котов (одного на левую, другого – на правую)?

Решение: во-первых, вновь следует обратить внимание на то, что в задаче речь идёт о **разных** объектах (даже если коты – однояйцовые близнецы).

а) ~~Молчание котов~~. Данной экзекуции подвергаются **сразу все коты** + важно их расположение, поэтому здесь имеют место перестановки: $P_4 = 4! = 24$ способами можно рассадить котов по углам комнаты.

При перестановках имеет значение лишь количество различных объектов и их взаимное расположение. В зависимости от настроения Вася может рассаживать животных полукругом на диване, в ряд на подоконнике и т.д. – перестановок во всех случаях будет 24. Желающие могут для удобства представить, что коты разноцветные (например, белый, чёрный, рыжий и полосатый) и перечислить все возможные комбинации.

б) Сколькими способами можно отпустить гулять котов?

Предполагается, что коты ходят гулять только через дверь, при этом вопрос подразумевает безразличие по поводу количества животных – на прогулку могут выйти 1, 2, 3 или все 4 кота.

Считаем все возможные комбинации:

$C_4^1 = 4$ способами можно отпустить гулять одного кота (любого из четырёх); $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$ способами можно отпустить гулять двух котов (варианты перечислите самостоятельно);

$C_4^3 = 4$ способами можно отпустить гулять трёх котов (какой-то один из четырёх сидит дома);

$C_4^4 = 1$ способом можно выпустить всех котов.

Наверное, вы догадались, что полученные значения следует просуммировать: $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$ способами можно отпустить гулять котов.

Энтузиастам предлагаю усложнённую версию задачи – когда любой кот в любой выборке случайным образом может выйти на улицу, как через дверь, так и через окно ~~10 этажа~~. Комбинаций заметно прибавится!

в) Сколькими способами Вася может взять на руки двух котов?

Ситуация предполагает не только выбор 2 животных, но и их размещение по рукам: $A_4^2 = 3 \cdot 4 = 12$ способами можно взять на руки 2 котов.

Второй вариант решения: $C_4^2 = 6$ способами можно выбрать двух котов **и** $P_2 = 2! = 2$ способами посадить **каждую** пару на руки: $C_4^2 \cdot P_2 = 6 \cdot 2 = 12$

Ответ: а) 24, б) 15, в) 12

Задача 5.

В лифт 12-этажного дома сели 3 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со 2-го) этаже. Сколькими способами:

1) пассажиры могут выйти на одном и том же этаже *(порядок выхода не имеет значения)*;
2) два человека могут выйти на одном этаже, а третий – на другом;
3) люди могут выйти на разных этажах;
4) пассажиры могут выйти из лифта?

Решение:

1) $C_{11}^1 = 11$ способами можно выбрать этаж для выхода всех пассажиров.

2) $C_{11}^2 = \frac{11!}{9! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$ способами можно выбрать 2 этажа для выхода пассажиров (например, 6-й и 11-й этаж).

$C_3^2 = 3$ способами можно выбрать двух человек для выхода на одном этаже (третий выйдет на другом этаже). Например:

6 этаж /11 этаж

Таня + Надя / Люся

Таня + Люся / Надя

Надя + Люся / Таня

Кроме того, любую пару и «одинокого человека» можно поменять этажами:

11 этаж / 6 этаж

Таня + Надя / Люся

Таня + Люся / Надя

Надя + Люся / Таня

Таким образом, для каждой пары этажей (55 уникальных сочетаний) возможно $C_3^2 \cdot P_2 = A_3^2 = 6$ способов выхода пассажиров. По правилу умножения комбинаций: $C_{11}^2 \cdot A_3^2 = 55 \cdot 6 = 330$ способами 2 пассажира могут выйти на одном этаже, а третий – на другом этаже.

3) $A_{11}^3 = 9 \cdot 10 \cdot 11 = 990$ способами пассажиры могут выйти на разных этажах.

Второй вариант решения: $C_{11}^3 = \frac{11!}{8! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{6} = 165$ способами можно выбрать 3 этажа для выхода и $P_3 = 3! = 6$ способами переставить пассажиров по каждойтройке этажей; следовательно, пассажиры могут выйти на разных этажах $C_{11}^3 \cdot P_3 = 165 \cdot 6 = 990$ способами.

4) Способ первый: суммируем комбинации первых трёх пунктов: $C_{11}^1 + C_{11}^2 \cdot A_3^2 + A_{11}^3 = 11 + 330 + 990 = 1331$ способом пассажиры могут выйти из лифта. Способ второй: в общем случае он более рационален, более того, позволяет обойтись без результатов предыдущих пунктов. Рассуждения таковы: $C_{11}^1 = 11$ способами может выйти 1-й пассажир из лифта и $C_{11}^1 = 11$ способами может выйти 2-й пассажир и $C_{11}^1 = 11$ способами может выйти 3-й пассажир. По правилу умножения комбинаций: $C_{11}^1 \cdot C_{11}^1 \cdot C_{11}^1 = 11 \cdot 11 \cdot 11 = 11^3 = 1331$ способом могут выйти три человека

Ответ: 1) 11; 2) 330; 3) 990; 4) 1331

Задача 6.

Студенческая группа состоит из 23 человек, среди которых 10 юношей и 13 девушек. Сколькими способами можно выбрать двух человек одного пола?

Решение: в данном случае подсчёт C_{23}^2 не годится, поскольку общее количество сочетаний включает в себя и разнополые пары.

Условие «выбрать двух человек одного пола» подразумевает, что необходимо выбрать двух юношей **или** двух девушек, и уже сама словесная формулировка указывает на верный путь решения:

$C_{10}^2 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ способами можно выбрать 2 юношей; $C_{13}^2 = \frac{13!}{11! \cdot 2!} = \frac{11! \cdot 12 \cdot 13}{11! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$ способами можно выбрать 2 девушек.

Таким образом, двух человек одного пола (без разницы – юношей **или** девушек) можно выбрать: $C_{10}^2 + C_{13}^2 = 45 + 78 = 123$ способами.

Ответ: 123

Задача 7.

В магазине «Все для чая» есть 6 разных чашек и 4 разных блюдца. Сколько вариантов чашки и блюдца можно купить?

Решение.

Чашку мы можем выбрать 6-ю способами, а блюдце 4-я способами. Так как нам надо купить пару чашку и блюдце, то это можно сделать $6 \cdot 4 = 24$ способами (по правилу произведения).

Ответ: 24.

Задача 8.

При встрече каждый из друзей пожал другому руку. Сколько всего было рукопожатий, если встретились 6 друзей?

Решение:

В одном рукопожатии равноправно участвуют два человека. 6 друзей объединялись в группы по 2 без учёта порядка следования. Такие группировки (выборки) называются сочетаниями. Число сочетаний определяем по формуле $C_6^2 = 6!/2!/(6 - 2)! = 6!/2!/4! = 5 \cdot 6/2 = 15$.

Ответ: 15.

Задача 9.

Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе повторяться не могут.

Решение.

Для выбора формулы выясняем, что для чисел, которые мы будем составлять, порядок учитывается и не все элементы одновременно выбираются. Значит, это соединение – размещение из 7 элементов по 3. Воспользуемся формулой для числа размещений: A73 = 7(7 – 1)(7 – 2) = 7 · 6 · 5 = 210 чисел.

Ответ: 210.

Задача 10.

Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры разные, а номер не может начинаться с нуля?

Решение.

На первый взгляд эта задача такая же, как и предыдущая, но сложность в том, что надо не учитывать те соединения, которые начинаются с нуля. Значит необходимо из существующих 10-ти цифр составить все семизначные номера телефонов, а потом от полученного числа отнять количество номеров, начинающихся с нуля. Формула будет иметь вид:

A107 – A96 = 10 · 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4 – 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4 = 544 320.

Ответ: 544 320.

Задача 11.

Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг – это сборники стихотворений, так, чтобы сборники стояли рядом?

Решение.

Сначала примем 5 сборников условно за одну книгу, потому что они должны стоять рядом. Так как в соединении существенным есть порядок, и все элементы используются, значит это перестановки из 8 элементов (7 книг + условная 1 книга). Их количество P8. Далее будем переставлять между собой только сборники стихотворений. Это можно сделать P5 способами. Поскольку нам нужно расставить и сборники, и другие книги, то воспользуемся правилом произведения. Следовательно, P8 · P5 = 8! · 5!. Число способов будет большим, поэтому ответ можно оставить в виде произведения факториалов.

Ответ: 8! · 5!

Задача 12.

В классе 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории возле школы нужно 4 мальчика и 3 девочки. Сколькими способами можно их выбрать со всех учеников класса?

Решение.

Сначала отдельно выберем 4 мальчика из 16 и 3 девочки из 12. Так как порядок размещения не учитывается, то соответственные соединения – сочетания без повторений. Учитывая необходимость одновременного выбора и мальчиков, и девочек, используем правило произведения. В результате число способов будет вычисляться таким образом:

C164 · C123 = (16!/(4! · 12!)) · (12!/(3! · 9!)) = ((13 · 14 · 15 · 16) / (2 · 3 · 4)) ·((10 · 11 · 12) / (2 · 3)) = 400 400.

Ответ: 400 400.

Задача 13.

Сколькими способами 10 футбольных команд могут разыграть между собой золотые, бронзовые и серебряные медали?

Решение.

На пьедестале почёта находятся 3 команды из 10, и для них очень существенно, кто какое место занял, т.е. порядок следования. Составление групп с учетом порядка следования - размещения. Число размещений определяем по формуле A_{10}^3 = 10!/(10 - 3)! = 10!/7! = 8·9·10 = 720. Другой способ решения с использованием И-правила, как в задаче 2б. Однако, чем больше выборка, тем удобнее сразу применять готовую формулу.

Ответ: 720.

Тема: Вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Пример 1. Пусть в урне содержится ***6*** одинаковых шаров, причем ***2*** из них - красные, ***3*** - синие и ***1*** - белый. Какова возможность вынуть наудачу из урны цветной шар? Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается можно. Это число и называется вероятностью события ***A*** (появления цветного шара). Таким образом, ***вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события***.

Каждый из возможных результатов испытания (в примере 4, испытание состоит в извлечении шара из урны) называется ***элементарным исходом***.

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, называются ***благоприятствующими*** этому событию. В примере 4 благоприятствуют событию ***A*** (появление цветного шара) 5 исходов.

События называются ***равновозможными***, если есть основания считать, что не одно из них не является более возможным, чем другое.

Пример 2. Появление того или иного числа очков на брошенном игральном кубике – равновозможные события.

Вероятностью P(A) события ***A*** называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. ***Вероятность P(A)*** события ***A*** определяется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где ***m*** – число элементарных исходов, благоприятствующих ***A***; ***n*** – число всех возможных элементарных исходов испытания.

В примере 4 всего элементарных исходов ***6***; из них ***5*** благоприятствуют событию ***A***. Следовательно, вероятность того что взятый шар окажется цветным, равна ***P(A) = 5/6***.

Пример 3. Определить вероятность выпадения нечётного числа очков на кости.

Решение. При бросании кости событие ***A*** – «выпало нечётное число очков» можно записать как подмножество {1, 3, 5} пространства исходов {1, 2, 3, 4, 5, 6} (рис. 1).

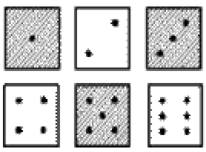

Рис. 1. Пространство исходов при бросании кости

Число всех равновозможных исходов ***n*** = 6, а число благоприятных событию ***A*** – ***m*** = 3. Следовательно,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

<u>*Пример 4*</u>. В урне находится ***7*** шаров: ***2*** белых, ***4*** черных и 1 красный. Вынимается один шар наугад. Какова вероятность того, что вынутый шар будет чёрным?

Решение. Занумеруем шары. Пусть, например, шары с номерами ***1*** и ***2*** – белые, с номерами ***3, 4, 5*** и ***6*** – чёрные, а красному шару присвоим номер ***7***. Так как мы можем вынуть только один из семи шаров, то общее число равновозможных исходов равно семи (***n = 7***). Из них ***4*** исхода – появление шаров с номерами ***3, 4, 5*** и***6*** – приведут к тому, что вынутый шар будет чёрным (***m = 4***). Тем самым, вероятность события ***A***, состоящего в появлении чёрного шара, равна $P(A) = \frac{4}{7}$.

Вычислите вероятность того, что вынутый шар будет белым.

Пример 5. Вычислить вероятность выпадения в сумме ***10*** очков при бросании пары костей.

Решение. Рассмотрим все равновозможные исходы в результате бросания двух костей (их число равно ***36*** - рекомендуем записать в виде таблицы). Выпадение в сумме ***10*** очков (событие ***A***) возможно в трёх случаях – ***4*** очка на первой кости и ***6*** на второй, ***5*** очков на первой и ***5*** на второй, ***6*** очков на первой и ***4*** на второй. Поэтому вероятность события A (выпадения в сумме ***10*** очков) равна $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Пример 6. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что взятый наудачу студентом билет, содержащий 2 вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?

Решение.

1) Обозначим событие А - «Вытянутый студентом билет состоит из подготовленных им билетов». Для вычисления вероятности появления данного события воспользуемся классическим определением вероятности события, согласно которому вероятность определяется по формуле: $P(A)=\frac{m}{n}$,

где m – число исходов, при которых появляется событие А, n – общее число элементарных несовместных равновозможных исходов.
2) Определим n. Общее число билетов определяется сочетанием по 2 из 60:

$$n = C^2_{60} = \frac{60!}{58!\cdot 2!} = \frac{60\cdot 59}{2} = 1770$$

3) Количество билетов, вопросы которых студент знает, определяется сочетанием по 2 из 50:

$$m = C^2_{50} = \frac{50!}{48!\cdot 2!} = \frac{50\cdot 49}{2} = 1225$$

4) Определим вероятность события А:

$$P(A)=\frac{1225}{1770} = 0{,}69.$$

Ответ: Вероятность того, что взятый наудачу студентом билет, содержащий 2 вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов равна P(A) = 0,69. То есть, если будет, например, 100 таких студентов, то 69 из них вытянут билеты, к вопросам которых они подготовлены.

Свойство 1. Вероятность ***достоверного*** события ***A*** равна единице: ***P(A) = 1***.

Свойство 2. Вероятность ***невозможного*** события ***A*** равна нулю: ***P(A) = 0***.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между ***нулем*** и ***единицей***:

Пример 7. Так как вероятность выпадения ***13*** очков при бросании пары костей – невозможное событие, его вероятность равна ***нулю***.

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов испытания конечно. На практике же часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно. Кроме этого, часто невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий. Еще труднее указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными. По этой причине, наряду с классическим определением вероятности используют и другие определения, в частности ***статистическое определение***.

Статистическое определение вероятности

Относительная частота наряду с вероятностью принадлежит к основным понятиям теории вероятностей.

Относительной частотой события ***A*** называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний:

$$W(A)=\frac{m}{n},$$

где ***m*** – число появлений события ***A***, ***n*** – общее число испытаний.

Классическая вероятность вычисляется до опыта, а относительная частота – после опыта.

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производят опыты, в каждом из которых число испытаний велико, то ***относительная частота обнаруживает свойство устойчивости***. Это свойство состоит в том, что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Это постоянное число и есть вероятность появления события.

Таким образом, при достаточно большом количестве испытаний в качестве ***статистической вероятности события*** принимают ***относительную частоту*** или число, близкое к ней.

Пример 8. Естествоиспытатель К. Пирсон терпеливо подбрасывал монету и после $\frac{12012}{24000} = 0{,}5005$ каждого бросания не ленился записывать полученный результат. Проделав эту операцию 24 000 раз, он обнаружил, что герб выпадал в 12 012 случаях. Вычисляя относительную частоту выпадения герба, он получил ,

что практически равно 1/2.

Содержание практической работы

Вариант 1.

1. **Решите задачу:**

Задача 1. В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

Решение. Рассмотрим событие A – из урны будет извлечён белый шар. Данному событию благоприятствуют $m = 15$ элементарных исходов, поэтому по классическому определению:

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён белый шар.

С другими пунктами аналогично, рассмотрим следующие события:

B – из урны будет извлечён красный шар;
C – из урны будет извлечён чёрный шар.

Событию B благоприятствует 5 элементарных исходов, а событию C – 10 элементарных исходов. Таким образом, соответствующие вероятности:

$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$;

$P(C) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Проверка многих задач по теории вероятности осуществляется с помощью **теоремы о сумме вероятностей событий, образующих полную группу**. В нашем случае события A, B, C образуют полную группу, а значит, сумма соответствующих вероятностей должна обязательно равняться единице: $P(A) + P(B) + P(C) = 1$.

Задача 2. В коробке лежат 8 зеленых, 7 синих и 15 красных карандашей. Вычислить вероятность того, что взятый наугад карандаш будет, синим или зеленым.

Решение:

А: взяли синий карандаш

В: взяли зеленый карандаш

С: взяли синий или зеленый карандаш

Событие С равно сумме событий А и В: С = А + В

Вероятность события А равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{7}{30}$

Вероятность события В равна $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{8}{30}$

Вероятность события С равна $P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{7}{30} + \frac{8}{30} = \frac{15}{30} = 0{,}5$

Ответ: 3.

Задача 3. В одной коробке находится 4 белых и 8 черных шаров, а в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой коробки вынули по шару. Вычислить вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение:

А: из первой коробки вынули белый шар

В: из второй коробки вынули белый шар

С: из коробок вынули белые шары

Вероятность события А равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Вероятность события В равна $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Вероятность события С равна $P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \approx 0{,}083$

Ответ: 0,083

Задача 4. В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

Решение. 30 – 5 = 25 холодильников не имеют дефекта. По классическому определению: $p = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$ – вероятность того, что наугад выбранный холодильник не имеет *дефекта.*

Ответ: $\frac{5}{6} \approx 0{,}8333$

Задача 5. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение:

А: абонент наугад набрал нужные цифры

Число всех возможных исходов равно $n = A_{10}^{2} = \frac{10!}{8!} = 90$

Число исходов, благоприятствующих событию А m = 1

Вероятность события А равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{90} = 0{,}011$

Ответ: 0,011

Задача 6. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места.

Решение. Вероятность набрать верную цифру из десяти равна по условию 1/10.

Рассмотрим следующие случаи:
1. первый звонок оказался верным, вероятность равна 1/10 (сразу набрана нужная цифра).
2. первый звонок оказался неверным, а второй - верным, вероятность равна 9/10*1/9=1/10 (первый раз набрана неверная цифра, а второй раз верная из оставшихся девяти цифр).
3. первый и второй звонки оказались неверными, а третий - верным, вероятность равна 9/10*8/9*1/8=1/10 (аналогично пункту 2).
Всего получаем P=1/10+1/10+1/10=3/10=0,3 - вероятность того, что ему придется звонить не более чем в три места.

Ответ: 0,3

Задача 7. Абонент забыл последние 2 цифры телефонного номера, но помнит, что они различны и образуют двузначное число, меньшее 30. С учетом этого он набирает наугад 2 цифры. Найти вероятность того, что это будут нужные цифры.

Решение. Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где m - число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n - число всех равновозможных элементарных исходов.
m=1, так как только одно число правильное. Подсчитаем количество всех возможных двузначных чисел с разными цифрами, меньшее 30, которые может набрать абонент:

Ответ: 1/18.

Задача 8. На шахматную доску случайным образом поставлены две ладьи. Какова вероятность, что они не будут бить одна другую?

Решение. Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где m - число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n - число всех равновозможных элементарных исходов.

Число всех способов расставить ладьи равно n=64·63=4032 (первую ладью ставим на любую из 64 клеток, а вторую - на любую из оставшихся 63 клеток).

Число способов расставить ладьи так, что они не будут бить одна другую равно m=64·(64−15)=64·49=3136 (первую ладью ставим на любую из 64 клеток, вычеркиваем клетки, которые находятся в том же столбце и строке, что и данная ладья, затем вторую ладью ставим на любую из оставшихся после вычеркивания 49 клеток).

Тогда искомая вероятность P=3136/4032=49/63=7/9=0,778.

Ответ: 7/9

Задача 9. Цифры 1, 2, 3, …, 9, выписанные на отдельные карточки складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что

число, написанное на этой карточке:

а) четное; б) двузначное.

Решение. Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где m - число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n - число всех равновозможных элементарных исходов.
Случай а) n=9, так как всего 9 различных карточек. m=4, так как всего на 4 карточках написаны четные числа (2, 4, 6, 8). Тогда P=4/9.
Случай б) n=9, так как всего 9 различных карточек. m=0, так как на всех карточках написаны однозначные числа. Тогда P=0/9=0.

Ответ: 4/9, 0.

Задача 10. На каждой из пяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: "а", "м", "р", "т", "ю". Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной карточке можно прочесть слово "юрта".

Решение. Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где m - число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n - число всех равновозможных элементарных исходов.
n=5·4·3·2=120 способов, так как первую карточку (букву) можно вытянуть (выбрать) 5 способами (так как всего карточек пять), вторую - 4 (осталось к этому шагу четыре), третью - 3 и четвертую - 2 способами.
m=1, так как искомая последовательность карточек "ю", потом "р", потом "т", потом "а" только одна.
Получаем вероятность P=1/120.
Ответ: 1/120.

Задача 11. Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность

того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?

Решение. Используем формулу классической вероятности: P=m/n, где n - число всех равновозможных элементарных исходов, m - число элементарных исходов, благоприятствующих осуществлению события.

Число различных перестановок из букв А, К, К, Л, У равно

n=5!1!2!1!1!=1·2·3·4·51·2=60,

из них только одна соответствует слову "кукла" (m=1), поэтому по классическому определению вероятности вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла" равна P=1/60.

Ответ: 1/60.

Задача 12. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания номера слева направо, но не обязательно рядом.

Решение. Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где n - число всех равновозможных элементарных исходов, m - число элементарных исходов, благоприятствующих осуществлению события A = (Тома стоят в порядке возвозрастания номера слева направо, но не обязательно рядом).
n=40·39·38=59280, так как первый том можно поставить на любое из 40 мест, второй - на любое из 39 мест и третий - на любое из оставшихся 38 мест. А число

m=C340=40!37!3!=40·39·381·2·3=9880.

Тогда искомая вероятность P(A)=mn=988059280=16.

Ответ: 1/6.

Задача 13. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему три вопроса?

Решение:

А: студент знает предложенные ему три вопроса

Число всех возможных исходов равно $n = C_{25}^{3} = \frac{25!}{3!\,22!} = 2300$

Число исходов, благоприятствующих наступлению события А равно $m = C_{20}^{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = 1140$

Вероятность события А равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1140}{2300} = 0{,}496$

Ответ: 0,496

Задача 14. На карточках написаны целые числа от 1 до 15 включительно. Наудачу извлекаются две карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел, написанных на карточках, равна десяти?

Решение:

А: сумма чисел, написанных на карточках, равна десяти

Число всех возможных исходов равно $n = C_{15}^{2} = \frac{15!}{2! \cdot 13!} = 105$

Число исходов, благоприятствующих событию А равно 4 (1+ 9; 2+8; 3+7; 4+6)

Вероятность события А равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{105} = 0{,}038$

Ответ: 0,038

Задача 15.В урне лежат шары, двузначные номера которых составлены из цифр 1,2,3,4,5. Какова вероятность вынуть шар с номером 15?

Решение:

А: вынут шар с номером 15

Число всех возможных исходов равно $n = A_{5}^{2} = \frac{5!}{3!} = 20$

Число исходов, благоприятствующих событию А m = 1

Вероятность события А равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{20} = 0{,}05$

Ответ: 0,05

Тема: Вычисление вероятностей сложных событий.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Вопросы для самопроверки.

1. Сформулируйте теорему умножения событий.
2. Сформулируйте теорему сложения событий.
3. Формула условной вероятности.

Формула полной вероятности

1. В пирамиде 10 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,85; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

2.В первой коробке содержится 25 радиоламп, из них 20 стандартных; во второй коробке – 15 ламп, из них 11 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.

3.Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная, равна 0,85, а второго – 0,95. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) – стандартная.

4. Набирая номер телефона, абонент забыл 2 цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набранные цифры правильные.

5. Из 50деталей 18 изготовлены в первом цехе, 20 – во втором, остальные в третьем. Первый и третий цеха дают продукцию отличного качества с вероятностью 0,95, второй цех – с вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет отличного качества?

6.В пирамиде 25 винтовок, 8 из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,9; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,65. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

7. В первой коробке содержится 35 радиоламп, из них 20 стандартных; во второй коробке – 25 ламп, из них 10 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.

8.Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная, равна 0,7, а второго – 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) – стандартная.

9. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 8.

10. Из 70деталей 20 изготовлены в первом цехе, 25 – во втором, остальные в третьем. Первый и третий цеха дают продукцию отличного качества с вероятностью 0,9, второй цех – с вероятностью 0,75. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет отличного качества?

Тема: Вычисление вероятностей событий в схеме Бернулли
Содержание и последовательность выполнения заданий

Вопросы для самопроверки.

1. Вероятности каких событий можно вычислять по формуле Бернулли?
2. Как записывается формула Бернулли?
3. Вероятности каких событий можно вычислять по локальной теореме Лапласа?
4. Вероятности каких событий можно вычислять по интегральной теореме Лапласа?
5. Как записывается формула локальной теоремы Лапласа?
6. Как записывается формула интегральной теоремы Лапласа?

Решение задач.

1. Найти вероятность того, что событие А появится не менее трех раз в пяти испытаниях, если вероятность появления события А в одном испытании равна 0,4.

2. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не менее трех?

3. В каждом из 700 независимых испытаний событие А происходит с постоянной вероятностью 0,35. Найти вероятность того, что событие А происходит: точно 270 раз; меньше чем 270 и больше чем 230 раз.

4. Найти вероятность того, что событие А появится в пяти независимых испытаниях не менее трех раз, если в каждом испытании вероятность появления события А равна 0,4.

5. Найти вероятность того, что при 300 испытаниях событие наступит ровно 100 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,6.

6. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет не менее двух раз.

7. В семье шесть детей. Найти вероятность того, что среди этих детей не более двух мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

8. В каждом из 500 независимых испытаний событие А происходит с постоянной вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что событие А происходит: точно 190 раз; меньше чем 235раз.

9. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент выключены все моторы.

10. Найти вероятность того, что при 300 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,4.

Тема: Вычисление вероятности по формуле Байеса.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Задание 1.

Краткое содержание теории

Если событие *A* может произойти только при выполнении одного из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые образуют ***полную группу несовместных событий***, то вероятность события *A* вычисляется по формуле

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \ldots + P(B_n)P(A|B_n).$$

Эта формула называется ***формулой полной вероятности***.

Вновь рассмотрим полную группу несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, вероятности появления которых $P(B_1), P(B_2), \ldots, P(B_n)$. Событие *A* может произойти только вместе с какимлибо из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые будем называть ***гипотезами***. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + \ldots + P(B_n)P(A \mid B_n)$$

Если событие A произошло, то это может изменить вероятности гипотез $P(B_1), P(B_2), \ldots, P(B_n)$.

По теореме умножения вероятностей

$$P(AB_1) = P(B_1)P(A \mid B_1) = P(A)P(B \mid A),$$

откуда

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(A)}.$$

Аналогично, для остальных гипотез

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Полученная формула называется ***формулой Байеса*** (***формулой Бейеса***). Вероятности гипотез $P(B_i \mid A)$ называются ***апостериорными вероятностями***, тогда как $P(B_i)$ - ***априорными вероятностями***.

Задание 2.

Работа над решением задач.

Пример. В магазин поступила новая продукция с трех предприятий. Процентный состав этой продукции следующий: 20% - продукция первого предприятия, 30% - продукция второго предприятия, 50% - продукция третьего предприятия; далее, 10% продукции первого предприятия высшего сорта, на втором предприятии - 5% и на третьем - 20% продукции высшего сорта. Найти вероятность того, что случайно купленная новая продукция окажется высшего сорта.

Решение. Обозначим через B событие, заключающееся в том, что будет куплена продукция высшего сорта, через A_1, A_2, A_3 обозначим события, заключающиеся в покупке продукции, принадлежащей соответственно первому, второму и третьему предприятиям.

Можно применить формулу полной вероятности, причем в наших обозначениях:

$P(A_1) = 0,2 \quad P(B|A_1) = 0,1$

$P(A_2) = 0,3 \quad P(B|A_2) = 0,05$

$P(A_3) = 0,5 \quad P(B|A_3) = 0,2$

Подставляя эти значения в формулу полной вероятности, получим искомую вероятность:

$P(B) = 0,2 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,2 = 0,135.$

Пример. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго - 0,5; для третьего - 0,8. Мишень не поражена. Найти вероятность того, что выстрелы произведены первым стрелком.

Решение. Возможны три гипотезы:

A_1 - на линию огня вызван первый стрелок,

A_2 - на линию огня вызван второй стрелок,

A_3 - на линию огня вызван третий стрелок.

Так как вызов на линию огня любого стрелка равновозможен, то $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}$.

В результате опыта наблюдалось событие В - после произведенных выстрелов мишень не поражена. Условные вероятности этого события при сделанных гипотезах равны:

$$P(B\mid A_1)=0,7\cdot 0,7=0,49;$$
$$P(B\mid A_2)=0,5\cdot 0,5=0,25;$$
$$P(B\mid A_3)=0,2\cdot 0,2=0,04.$$

по формуле Байеса находим вероятность гипотезы A_1 после опыта:

$$P(A|B)=\frac{0,49\cdot 1/3}{1/3\cdot 0,49+1/3\cdot 0,25+1/3\cdot 0,04}=\frac{0,49}{0,78}=0,628.$$

Пример. На трех станках-автоматах обрабатываются однотипные детали, поступающие после обработки на общий конвейер. Первый станок дает 2% брака, второй – 7%, третий – 10%. Производительность первого станка в 3 раза больше производительности второго, а третьего – в 2 раза меньше, чем второго.

а) Каков процент брака на конвейере?

б) Каковы доли деталей каждого станка среди бракованных деталей на конвейере?

Решение. Возьмем с конвейера наудачу одну деталь и рассмотрим событие А – деталь бракованная. Оно связано с гипотезами относительно того, где была обработана эта деталь: H_k – взятая наудачу деталь обработана на k-ом станке, $k=1,2,3$.

Условные вероятности (в условии задачи они даны в форме процентов):

$P(A|H_1)=0,02,\ P(A|H_2)=0,07,\ P(A|H_3)=0,1.$

Зависимости между производительностями станков означают следующее:

$P(H_1)=3P(H_2),\ P(H_3)=0,5P(H_2)$.

А так как гипотезы образуют полную группу, то $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1$.

Решив полученную систему уравнений, найдем: $P(H_1)=6/9,\ P(H_2)=2/9,\ P(H_3)=1/9$.

а) Полная вероятность того, что взятая наудачу с конвейера деталь – бракованная:

$$P(A)=\sum P(A|H_i)P(H_i)=\frac{6}{9}0,02+\frac{2}{9}0,07+\frac{1}{9}0,1=0,04.$$

Другими словами, в массе деталей, сходящих с конвейера, брак составляет 4%.

б) Пусть известно, что взятая наудачу деталь – бракованная. Пользуясь формулой Байеса, найдем условные вероятности гипотез:

$$P(H_1|A)=\frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)}=\frac{6/9\cdot 0,02}{0,04}=0,33,$$

$$P(H_2|A)=\frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)}=\frac{2/9\cdot 0,07}{0,04}=0,39,$$

$$P(H_3|A)=\frac{P(A|H_3)P(H_3)}{P(A)}=\frac{1/9\cdot 0,1}{0,04}=0,28.$$

Таким образом, в общей массе бракованных деталей на конвейере доля первого станка составляет 33%, второго – 39%, третьего – 28%.

Задание 3.

Задачи для самостоятельного решения

1. Являются ли случаями следующие группы событий: а) опыт — бросание монеты; события: *A1* — появление герба; *A2* — появление цифры; б) опыт — бросание двух монет; события: *B1* — появление двух гербов; *B2* — появление двух цифр; *B3* — появление одного герба и одной цифры; в) опыт — бросание игральной кости; события: *C1* — появление не более

двух очков; *C2* — появление трех или четырех очков; *C3* —появление не менее пяти очков; г) опыт — выстрел по мишени; события: *D1* — попадание; *D2* —промах; д) опыт — два выстрела по мишени; события:*E0* — ни одного попадания; *E1* — одно попадание; *E2* — два попадания; е) опыт — вынимание двух карт из колоды; события: *F1* — появление двух красных карт; *F2* — появление двух черных карт?

2. В урне А белых и В черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар — белый.

3. В урне А белых и *B* черных шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

4. В урне А белых и В черных шаров. Из урны вынули один шар и, не глядя, отложили в сторону. После этого из урны взяли еще один шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону, — тоже белый.

5. Из урны, содержащей А белых и В черных шаров, вынимают один за другим все шары, кроме одного. Найти вероятность того, что последний оставшийся в урне шар будет белым.

6. Из урны, в которой А белых шаров и В черных, вынимают подряд все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

7**.** В урне А белых и В черных шаров $(A > 2)$. Из урны вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

8. В урне А белых и В черных шаров (А > 2, В > 3). Из урны вынимают сразу пять шаров. Найти вероятность *p* того, что два из них будут белыми, а три черными.

9. В партии, состоящей из X изделий, имеется *I* дефектных. Из партии выбирается для контроля I изделий. Найти вероятность *p* того, что из них ровно J изделий будут дефектными.

10. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность следующих событий: *A* — появление четного числа очков; *B* — появление не менее 5 очков; *C*— появление не более 5 очков.

11. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность *p* того, что оба раза появится одинаковое число очков.

Тема: Решение задач на запись распределения ДСВ.
Содержание и последовательность выполнения заданий

Вопросы для самопроверки.

1. Дайте определение дискретной случайной величины.
2. Дайте определение непрерывной случайной величины.
3. Дайте определение закона распределения дискретной случайной величины.
4. Дайте определение многоугольника распределения дискретной случайной величины.

Формула биномиального распределения

Выполнение решения задач

1. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

	,2	,4	,1	,3

2. В денежной лотерее выпущено 500 билетов. Разыгрывается два выигрыша по1000 рублей, десять выигрышей по 100 рублей и двадцать – по 50 рублей. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

3. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных.

4. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

				1	4
	1	,15	3	,45	,15

Найти вероятности p_1 и p_3, если известно, что p_1 в 2 раза меньше p_3.

5. Банк выдает пять кредитов. Вероятность невозврата кредита равна 0,2 для каждого из заемщиков. Составить закон распределения случайной величины X – числа заемщиков, не вернувших кредит по окончании срока кредитования.

Индивидуальная работа

1. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

	,1	,6	,2	,1

2. В денежной лотерее выпущено 200 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 100 рублей, пять выигрышей по 50 рублей и двадцать – по 10 рублей. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

3. В партии 15% нестандартных деталей. Наудачу отобраны пять деталей. Написать закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди пяти отобранных.

4. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

				2	8
	,25	2	3	,25	,15

Найти вероятности p_2 и p_3, если известно, что p_2 в 2 раза больше p_1.

5. Банк выдает четыре кредита. Вероятность невозврата кредита равна 0,3 для каждого из заемщиков. Составить закон распределения случайной величины X – числа заемщиков, не вернувших кредит по окончании срока кредитования.

Тема: Вычисление вероятностей и нахождение характеристик для НСВ с помощью функции плотности и интегральной функции распределения

Содержание и последовательность выполнения заданий

Вопросы для самопроверки.

1. Дайте определение математического ожидания непрерывной случайной величины.
2. Дайте определение дисперсии непрерывной случайной величины.
3. Дайте определение среднего квадратического отклонения непрерывной случайной величины.
4. Дайте определение моды.
5. Дайте определение начального момента.
6. Запишите формулы вычисления моды и начального момента.

Решение задач.

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной плотностью распределения f(x) = 1 на интервале (0;1).
2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{1}{4}x \text{ при } 0 < x \le 4, \\ 1 \text{ при } x > 4. \end{cases}$
3. Случайная величина X в интервале (2;4) задана плотностью распределения $f(x) = -0{,}75x^2 + 4{,}5x - 6$; вне этого интервала f(x) = 0. Найти моду величины X.
4. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения $F(x)= \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ 5x^2 - 1 \text{ при } 0 < x \le 1, \\ x \text{ при } x > 1. \end{cases}$
5. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x) = 2x в интервале (0;2); вне этого интервала f(x) = 0. Найти начальные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Индивидуальное выполнение задач

1.Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной плотностью распределения $f(x)=\frac{1}{2}x$ на интервале (0;2).

2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной функцией распределения F(x)= $\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \cos x \text{ при } 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \text{ при } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

3. Случайная величина X в интервале (0;1) задана плотностью распределения $f(x)= 3x^2$; вне этого интервала f(x) = 0. Найти моду величины X.

4. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения F(x)= $\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ x \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

5. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x) = 4x в интервале (0;3); вне этого интервала f(x) = 0. Найти начальные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Тема:Вычисление вероятностей и нахождение характеристик для НСВ с помощью интегральной функции распределения

Содержание и последовательность выполнения заданий

Вопросы для самопроверки

1. Что такое плотность распределения? Свойства плотности.
2. Вероятность смысл плотности.
3. Что такое математическое ожидание НСВ? Формула вычисления.
4. Что такое дисперсия НСВ? Формула вычисления.
5.Что такое среднее квадратическое отклонение НСВ? Формула вычисления.

Самостоятельная работа

Вариант №1

1. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x<0 \\ \sin 2x, & при \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 1, & при \quad x > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Найти плотность распределения *f(x)*.

2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x<1 \\ x-0{,}5, & при \quad 1 \le x \le 2; \\ 0, & при \quad x > 2 \end{cases}$$

Найти функцию распределения *F(x)*. Построить графики обоих функций.

Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (1,5; 2).

3. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0\\ \frac{2}{3}x, & при \quad 0\le x\le 2;\\ 0, & при \quad x>2\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

4. Для распределения из задания 1 найти моду и медиану.

Вариант №2

1. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0\\ \cos 2x, & при \quad 0\le x\le \frac{\pi}{2};\\ 1, & при \quad x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

Найти плотность распределения *f(x)*.

2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<1\\ 0{,}5-x, & при \quad 1\le x\le 3;\\ 0, & при \quad x>3\end{cases}$$

Найти функцию распределения *F(x)*. Построить графики обоих функций.
Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (1; 2,5).

3. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<1\\ 3x, & при \quad 1\le x\le 2;\\ 0, & при \quad x>2\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

4. Для распределения из задания 1 найти моду и медиану.

Вариант №3

1. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0\\ \sin 3x, & при \quad 0\le x\le \frac{\pi}{4};\\ 1, & при \quad x>\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

Найти плотность распределения *f(x)*.

2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<1\\ 2x-0,5, & при \quad 1\le x\le 2;\\ 0, & при \quad x>2\end{cases}$$

Найти функцию распределения *F(x)*. Построить графики обоих функций.
Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (1,5; 2).

3. Случайная величина X задана плотностью распределения *f*(*x*) = 2*x* на интервале (0;1), а вне этого интервала *f*(*x*) = 0. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.
4. Для распределения из задания 1 найти моду и медиану.

Вариант №4
1. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0\\ \cos 3x, & при \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{2};\\ 1, & при \quad x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Найти плотность распределения *f(x)*.

2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<1\\ 1,5-x, & при \quad 1\le x\le 3;\\ 0, & при \quad x>3\end{cases}$$

Найти функцию распределения *F(x)*. Построить графики обоих функций.
Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (1; 2,5).

3. Случайная величина X задана плотностью распределения *f*(*x*) = 1/2*x* на интервале (0;2), а вне этого интервала *f*(*x*) = 0. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

4. Для распределения из задания 1 найти моду и медиану.

Тема:Вычисление вероятностей для нормально распределенной величины; вычисление вероятностей и нахождение характеристик для показательно распределенной величины.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Вопросы для самопроверки.
1. Дайте определение нормального распределения.
2. Запишите формулу плотности нормального распределения.
3. Дайте определение показательного распределения.
4. Запишите формулу плотности показательного распределения.
5. Дайте определение и запишите формулу функции показательного распределения.

Решение задач.

1. Математическое ожидание нормально распределенной величины Х равно 3 и среднее квадратическое отклонение 2. Написать плотность вероятности Х.

2. Нормально распределенная случайная величина Х задана плотностью f(x) $=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$.

Найти математическое ожидание и дисперсию Х.

3. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр λ=4.

4. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного функцией распределения F(x) = $1-e^{-0,1x}$ (x≥ 0).

5. Найти математическое ожидание показательного распределения, заданного при x≥ 0 плотностью распределения f(x) = $5e^{-5x}$.

Индивидуальное решение задач.

1. Математическое ожидание нормально распределенной величины Х равно 9 и среднее квадратическое отклонение 6. Написать плотность вероятности Х.

2.Нормально распределенная случайная величина Х задана плотностью f(x)=$\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-173)^2}{72}}$.

Найти математическое ожидание и дисперсию Х.

3. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр λ=6.

4. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного функцией распределения F(x) = $1-e^{-3x}$ (x≥ 0).

5. Найти математическое ожидание показательного распределения, заданного при x≥ 0 функцией распределения F(x) = $1-e^{-0,1x}$.

Тема:Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по нормальному закону

Содержание и последовательность выполнения заданий

Практическое выполнение заданий.

№ 1. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0\\ \frac{1}{10}(x^3+x), & \text{если} \quad 0\leq x\leq 2\\ 1, & \text{если} \quad x>2\end{cases}$$

Вычислить $M(X), D(X), \sigma(X)$. И построим ещё графики $F(x)$ и $f(x)$, ну а куда же без них?

№ 2. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ x^2/9 & \text{при } x\in[0,3],\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Вопросы для самопроверки.

1. Дайте определение математического ожидания непрерывной случайной величины.
2. Дайте определение дисперсии непрерывной случайной величины.
3. Дайте определение среднего квадратического отклонения непрерывной случайной величины.
4. Дайте определение моды.
5. Дайте определение начального момента.
6. Запишите формулы вычисления моды и начального момента.

Решение задач

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной плотностью распределения f(x) = x на интервале (0;3).
2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной функцией распределения F(x)= $\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \sin 2x \text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 1 \text{ при } x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

3. Случайная величина X в интервале (3;5) задана плотностью распределения f(x) = - 1,5x^2+ 12x – 22,5;вне этого интервала f(x) = 0. Найти моду величины X.

4. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения F(x)= $\begin{cases}0 \text{ при } x\le -2,\\ \dfrac{1}{4}x+0{,}5 \text{ при } -2<x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$

5. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x) = 5x в интервале (0;2); вне этого интервала f(x) = 0. Найти начальные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Самостоятельное решение задач

1.Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной плотностью распределения f(x)= $\frac{1}{2}x$ на интервале (0;2).

2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной функцией распределения F(x)= $\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \cos x \text{ при } 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \text{ при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

3. Случайная величина X в интервале (0;1) задана плотностью распределения f(x)= $3x^2$; вне этого интервала f(x) = 0. Найти моду величины X.

4. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения F(x)= $\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ x \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

5. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x) = 4x в интервале (0;3); вне этого интервала f(x) = 0. Найти начальные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Тема:Понятие о центральной предельной теореме.
Содержание и последовательность выполнения заданий

Пример 1. Вероятность наступления события A в каждом испытании равна 0,3. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что в 10000 испытаниях отклонение относительной частоты появления события A от его вероятности не превзойдет по абсолютной величине 0,01.

В соответствии с неравенством Чебышева вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания будет меньше некоторого числа е, ограничена в соответствии с неравенством $P(|X - m_x| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2}$.

Надо определить математическое ожидание и дисперсию числа появления события A при одном опыте. Для события A случайная величина может принимать одно из двух значений: 1- событие появилось, 0- событие не появилось. При этом вероятность значения 1 равна вероятности *P*=0,3, а вероятность значения 0- равна вероятности ненаступления события A

Q=1 – P =0,7.

По определению математического ожидания имеем:

$m_x = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p = 0{,}3$

Дисперсия: $D_x = (0-p)^2 q + (1-p)^2 p = pq = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$

В случае *П* независимых испытаний получаем $m_x = np; \quad D_x = npq;$ Эти формулы уже упоминались выше.

В нашем случае получаем: $m_x = 3000; \quad D_x = 2100;$

Вероятность отклонения относительной частоты появления события A в *П* испытаниях от вероятности на величину, не превышающую е=0,01 равна:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=P(|m-np|<n\varepsilon)=P(|m-m_x|<n\varepsilon)=P(|m-3000|<100)$$

Выражение полученное в результате этих простых преобразований представляет собой не что иное, как вероятность отклонения числа *Т* появления события А от математического ожидания на величину не большую, чем d=100.

В соответствии с неравенством Чебышева эта вероятность будет не меньше, чем величина $1-\frac{D_x}{\delta^2}=1-\frac{2100}{10000}=1-0{,}21=0{,}79.$

Пример 2. Сколько следует проверить деталей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,96, можно было ожидать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты годных деталей от вероятности детали быть годной, равной 0,98, не превысит 0,02.

Условие задачи фактически означает, что выполняется неравенство:

$$P\left(\left|\frac{n}{m}-0{,}98\right|\le 0{,}02\right)\ge 0{,}96$$

Здесь *П*- число годных деталей, *Т*- число проверенных деталей. Для применения неравенства Чебышева преобразуем полученное выражение:

$$P(|n-0{,}98m|\le 0{,}02m)\ge 1-\frac{D_x}{(0{,}02m)^2}\ge 0{,}96$$

После домножения выражения, стоящего в скобках, на *Т* получаем вероятность отклонения по модулю количества годных деталей от своего математического ожидания, следовательно, можно применить неравенство Чебышева, т. е. эта вероятность должна быть не меньше, чем величина $1-\frac{D_x}{(0{,}02m)^2}$, а по условию задачи еще и не меньше, чем 0,96.

Таким образом, получаем неравенство $0{,}96\le 1-\frac{D_x}{(0{,}02m)^2}$. Как уже говорилось в предыдущей задаче, дисперсия может быть найдена по формуле $D_x=mpq$.

Итого, получаем: $D_x\le(0{,}02m)^2-0{,}96\cdot(0{,}02m)^2;\quad m\cdot 0{,}98\cdot 0{,}02\le 0{,}04\cdot(0{,}02m)^2;$

$$m\ge\frac{0{,}98\cdot 0{,}02}{0{,}04\cdot 0{,}0004};\qquad m\ge 1225$$

Т. е. для выполнения требуемых условий необходимо не менее 1225 деталей.

Пример3. Суточная потребность электроэнергии в населенном пункте является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 3000 кВт/час, а дисперсия составляет 2500. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки расход электроэнергии в этом населенном пункте будет от 2500 до 3500 кВт/час.

Требуется найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал:

$$P(2500\le X\le 3500)=?$$

Крайние значения интервала отклоняются от математического ожидания на одну и ту же величину, а именно – на 500. Тогда можно записать с учетом неравенства Чебышева:

$$P(2500\le X\le 3500)=P(|X-m_x|\le 500)\ge 1-\frac{D_x}{500^2}$$

Отсюда получаем:

$$P\ge 1-\frac{2500}{250000}=0{,}99$$

Т. е. искомая вероятность будет не меньше, чем 0,99.

Пример 4. Среднее квадратическое отклонение каждой из 2500 независимых случайных величин не превосходит 3. Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения среднего арифметического этих случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий не превосходит 0,3.

Требуется найти вероятность

Тема:Решение задач на центральную предельную теорему
Содержание и последовательность выполнения заданий

Пример 1. Вероятность того, что наудачу выбранная деталь окажется бракованной, при каждой проверке одна и та же и равна 0,2. Определить вероятность того, что среди 50 наугад выбранных деталей бракованных окажется не менее 6.

Пример 2. Известно, что 60% всего числа изготавливаемых заводом изделий являются изделиями первого сорта. Приемщик берет первые попавшиеся 200 изделий. Чему равна вероятность того, что среди них окажется из от 120 до 150 изделий первого сорта?

Вероятность того, что деталь окажется первого сорта, равна, очевидно, 0,6.

Пример3. Проверкой установлено, что 96% изделий служат не меньше гарантируемого срока. Наугад выбирают 15000 изделий. Найти вероятность того, что со сроком службы менее гарантируемого будет от 570 до 630 изделий.

Пример 4.

Среднее количество вызовов, поступающих на коммутатор завода в течении часа, равно 300. Оценить вероятность того, что в течение следующего часа число вызовов на коммутатор:

а) превысит 400;

б) будет не более 500.

Пример 5.

Сумма всех вкладов в отделение банка составляет 2 млн. руб., а вероятность того, что случайно взятый вклад не превысит 10 тыс. руб., равна 0,6. Что можно сказать о числе вкладчиков?

Пример 6.

Средний расход воды на животноводческой ферме составляет 1000 *л* в день, а среднее квадратичное отклонение этой случайной величины не превышает 200 *л.* Оценить вероятность того, что расход воды на ферме в любой выбранный день не превзойдет 2000 *л,* используя:

а) неравенство Маркова;

б) неравенство Чебышева.

Пример 7

Вероятность выхода с автомата стандартной детали равна 0,96. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что число бракованных среди 2000 деталей находится в границах от 60 до 100 (включительно). Уточнить вероятность того же события с помощью интегральной теоремы Муавра-Лапласа. Объяснить различие полученных результатов.

Пример 8.

Оценить вероятность того, что отклонение любой случайной величины от ее математического ожидания будет не более трех средних квадратических отклонений (по абсолютной величине) –

(правило трех сигм).

Пример 9.
По данным примера 2.8 с помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что из 1000 новорожденных доля доживших до 50 лет будет отличаться от вероятности этого события не более, чем на 0,04 (по абсолютной величине).

Пример10.
Для определения средней продолжительности горения электроламп в партии из 200 одинаковых ящиков было взято на выборку по одной лампе из каждого ящика. Оценить вероятность того, что средняя продолжительность горения отобранных 200 электроламп отличается от средней продолжительности горения ламп во всей партии не более чем на 5 ч (по абсолютной величине), если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения ламп в каждом ящике меньше 7 ч.

Пример 11.
Сколько надо провести измерений данной величины, чтобы с вероятностью не менее 0,95 гарантировать отклонение средней арифметической этих измерений от истинного значения величины не более, чем на 1 (по абсолютной величине), если среднее квадратическое отклонение каждого из измерений не превосходит 5?

Тема:Решение задач на неравенство Маркова.
Содержание и последовательность выполнения заданий

Неравенство Маркова применяют для оценки вероятности неотрицательных случайных величин, для которых неизвестен закон распределения. Если $M(X)>e$, то для оценки вероятности используют другие неравенства, т.к. 0£$P\{X>e\}$£1.

Задача 1. Средний срок службы холодильника 5 лет. Оценить вероятность того, что данный холодильник не прослужит более 20 лет.

Решение. Пусть X – срок службы. Используя неравенство Маркова, имеем
$P(X$£$20)$³$1-5/20 = 0.75$.

Задача 2. Сумма всех вкладов в сбербанке составляет $4\cdot 10^6$ рублей. Вероятность того, что случайно выбранный вклад не превышает 1000 рублей равна 0.8. Оценить число вкладчиков в этом банке.

Решение. Пусть в банке n вкладчиков. Обозначим через X величину случайного снятого вклада.

Найдем математическое ожидание вкладов отдельных вкладчиков $M(X) = 4\cdot 10^6/n$. Пусть $e=1000=10^3$. Согласно условию задачи имеем $P|x<1000|=0.8$. Но, используя неравенство Маркова, эту вероятность можно записать в виде неравенства

$$0.8 = P(X \le \varepsilon) > 1 - \frac{4\cdot 10^6}{10^3 n}.$$

Отсюда $4000/n>0.2$, поэтому $n<20000$, т.о. в этом банке могут содержать вклады не более двадцати тысяч вкладчиков.

Задача 3. Средний вес клубня картофеля равен 120 *г*. Какова вероятность того, что наугад взятый клубень картофеля весит не более 360 *г*?

Решение. Искомую вероятность оценим при помощи неравенства Маркова (1), которое запишем в виде

$P(X \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{M[X]}{\varepsilon}$. (4)

Случайную величину – вес клубня – обозначим через X. По условию M[X]=120, ε=360. Тогда

$P(X \le 360) \ge 1 - \frac{120}{360} = \frac{2}{3}$.

Задача 4. Оценить вероятность того, что при 3600 независимых подбрасываниях игрального кубика число появлений шести очков будет не меньше 900.

Решение. Пусть X – число появлений шести очков при *n*=3600 подбрасываниях, тогда M[X]=*np*=$3600 \cdot \frac{1}{6} = 600$.

Следовательно $P(X > 360) \le \frac{600}{900} = \frac{2}{3}$.

Задача 5.. Сумма всех вкладов в некотором банке составляет 2000000 *руб.*, а вероятность того, что случайно взятый вклад не превышает 10000 *руб.*, равна 0,8. Сделайте оценку числа вкладчиков данного банка.

Решение. Пусть X – величина случайно взятого вклада, а *n* – число всех вкладчиков. Тогда из условия задачи следует, что M[X]= $\frac{2 \cdot 10^6}{n}$.Так как $P(X < 10^4) = 0{,}8$ и по неравенству (2) получаем

$$P(X < 10^4) \ge 1 - \frac{M[X]}{10^4} \quad \Rightarrow \quad 0{,}8 \ge 1 - \frac{2 \cdot 10^6}{n \cdot 10^4} \quad \Rightarrow \quad n \le 1000.$$

Дополнительный материал.

Задачи.

1. Средний срок службы мотора 4 года. Оценить вероятность того, что данный мотор не прослужит более 20 лет.

Ответ: P≥0,8

2. Дана случайная величина X:

x_i	2	4	6	8	10	12
p_i	0,1	0,3	0,25	0,15	0,15	0,05

Какова вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее 11? Оценить эту вероятность, пользуясь неравенством Маркова.

Ответ: 0,95, P≥0,435

3. Приняв вероятность попадания в цель при выстреле равной 0,4, оценить вероятность того, что при 120 выстрелах окажется не более 80 попаданий. Найти приближенное значение этой вероятности, пользуясь интегральной теоремой Муавра-Лапласа.

Ответ: P≥0,4

4. Среднее значение расхода воды в населенном пункте составляет 50000 *л* в день. Оценить вероятность того, что в этом населенном пункте расход воды не будет превышать 120000 *л* день.

Ответ: P≥0,583

5. Неотрицательные случайные величины X и Y независимы. Оценить вероятность неравенств: а) X+Y<40; б) XY<200, если M[X]=5, M[Y]=4.
Ответ: а) P≥0,755; б) P≥0,9

6. Для некоторого автопарка среднее число автобусов, отправляемых в ремонт после месяца эксплуатации на городских линиях, равно 5. Оценить вероятность того, что по истечении месяца в данном автопарке будет отправлено в ремонт меньше 15 автобусов, если: а) отсутствует информация о дисперсии; б) известно, что дисперсия равна 4; в) предполагается, что число автобусов, отправляемых после месяца эксплуатации, подчиняется закону распределения Пуассона с параметром λ=5.

Ответ: а) 0,666; б) 0,871; в) 0,9998.

Тема:Неравенство Чебышева и его применение.
Содержание и последовательность выполнения заданий

Пример 1. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время *T* равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время *T* окажется: а) меньше двух; б) не меньше двух.

X	1	2	3	4	5	6
P	0,05	0,10	0,25	0,30	0,20	0,10

Пример 5. Распределение случайной величины X дается следующей таблицей:

Чему равна вероятность того, что |X–M[X]|<2? Оценить эту вероятность, пользуясь неравенством Чебышева.
Решение. Сначала находим математическое ожидание и дисперсию случайной величины X:
M[X] = 1·0,05+2·0,10+3·0,25+4·0,30+5·0,20+6·0,10 = 3,80,
$M[X^2] = 1^2 \cdot 0,05+2^2 \cdot 0,10+3^2 \cdot 0,25+4^2 \cdot 0,30+5^2 \cdot 0,20+6^2 \cdot 0,10 = 16,10$,
$D[X] = M[X^2]–M[X]^2 = 16,10–3,80^2 = 1,66$.
Чтобы найти P(|X–M[X]|<2), надо знать те значения X, которые удовлетворяют неравенству |X–M[X]|<2 $\Rightarrow$ |X–3,8|<2 $\Rightarrow$ 1,8<X<5,8. Этим неравенствам удовлетворяют только такие значения X: 2, 3, 4 и 5. Отсюда

P(|X–3,8|<2) = P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5) = 0,10+0,25+0,30+0,20 = 0,85.

Пользуясь неравенством Чебышева получить оценку данной вероятности снизу:

$$P(|X-3,8|<2) \geq 1-\frac{1,66}{2^2}=0,585$$
.

Пример 6. Для определения средней продолжительности горения электролампы в партии из 200 одинаковых ящиков было взято на выборку по одной лампе из каждого ящика. Оценить вероятность того, что средняя продолжительность горения отобранных 200 электроламп отличается от средней продолжительности горения во всей партии по модулю меньше чем на 5 *ч*, если известно, что среднее квадратичное отклонение продолжительности горения ламп в каждом ящике не больше 7 *ч*.

Решение. Пусть X_i – продолжительность горения электролампы, взятой из i-го ящика. В задаче дано, что $D[X_i]<7^2=49$. Используя неравенство (7), в котором $C=49$, $\varepsilon=5$, $n=200$, получим

$$P \geq 1 - \frac{49}{200 \cdot 5^2} = 0{,}9902.$$

Пример 7. Сколько должно быть произведено независимых измерений некоторой физической величины, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,98, можно было утверждать, что среднее арифметическое результатов измерений отличается от истинного значения по модулю не больше чем на 0,01, если дисперсия отдельного результата измерения не превосходят 1?

Решение. Пусть X_i – результат i-го измерения. Из условия задачи следует, что $D[X_i]<1$. Поэтому

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{1}{n \cdot 0{,}01^2} \geq 0{,}98 \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{10^4}{0{,}02} = 5 \cdot 10^5.$$

Задачи.

9^0. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, абсолютное величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время T окажется: а) меньше трех; б) не меньше трех.

Ответ: а) $P\geq 0{,}64$; б) $P\leq 0{,}36$.

10^0. Распределение случайной величины X дается следующей таблицей:

X	–1	0	2	4	6
P	0,2	0,4	0,3	0,05	0,05

Чему равна вероятность того, что $|X–M[X]|<5$? Оценить эту вероятность, пользуясь неравенством Чебышева.

Ответ: а) 0,95; б) $P\geq 0{,}872$.

11^0. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, абсолютное величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время T окажется: а) меньше трех; б) не меньше трех.

Ответ: а) $P\geq 0{,}64$; б) $P\leq 0{,}36$.

12. Известно, что дисперсия каждой из данных независимых случайных величин не превышает 4. Определить число таких величин, при котором вероятность отклонения средней арифметической случайных величин от средней арифметической их математических ожиданий не более чем на 0,25 превысит 0,99.

Ответ: $n\geq 6400$.

13. Дисперсия каждой из 800 независимых случайных величин не превышает 9. Какой должна быть верхняя граница абсолютной величины отклонения средней арифметической случайных величин от средней арифметической их математических ожиданий, чтобы вероятность такого отклонения превышала 0,997?

Ответ: 0,18.

Тема: Построение для заданной выборки ее графической диаграммы определения вероятности.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Вопросы для самопроверки.

1. Дайте определение вариационного ряда.
2. Что называется размахом выборки?
3. Как для данной выборки получают статистический ряд и выборочное распределение?
4. Какие графические изображения выборок вы знаете?
5. Чему равна площадь гистограммы относительных частот?
6. Дайте определение выборочного среднего.
7. Дайте определение выборочной дисперсии.
8. Как связаны между собой выборочная дисперсия и несмещенная выборочная дисперсия?

Решение задач

№ 1. Для выборки 7,-7,2,7,7,5,5,7,5,-7 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в)статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж)выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.

№ 2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	10-15	2
2	15-20	4
3	20-25	8
4	25-30	4
5	30-35	2

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

№ 3. Для выборки 5,2,8,-2,5,-2,0,0,8,5 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в)статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж)выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.

№ 4. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	2-5	6
2	5-8	7
3	8-11	4
4	11-14	5
5	14-17	3

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

Тема:Интервальное оценивание математического ожидания нормального распределения. Содержание и последовательность выполнения заданий

Построим доверительный интервал для дисперсии D=σ2 наблюдаемой случайной величины ξ ~ $N(m;\ \sigma^2)$ по случайной выборке $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ при неизвестном математическом ожидании.

Введем случайную величину (статистику) $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, (3.36)

Которая согласно утверждению 2 теоремы Фишера имеет распределение χ^2 с $n-1$ степенями свободы. Поскольку плотность распределения этого закона асимметрична, доверительный интервал, соответствующий надежности β, найдем из формулы (3.31) в виде:

$$P\{c_1 \le \chi^2 \le c_2\} = \beta. \quad (3.37)$$

Обычно доверительный интервал I_β для случайной величины χ^2 выбирают так, чтобы вероятность ее попадания за пределы этого интервала влево и вправо была одинаковой (рис. 3.9):

$$P\{\chi^2 < c_1\} = P\{\chi^2 > c_2\} = \frac{1-\beta}{2}.$$

Тогда условия для определения значений c_1 и c_2 будут иметь вид:

$$P\{\chi^2 < c_1\} = \frac{1-\beta}{2},\quad P\{\chi^2 < c_2\} = 1 - \frac{1-\beta}{2} = \frac{1+\beta}{2}.$$

По таблице квантилей χ^2 - распределения (табл. С Приложения) найдем

$$c_1 = \chi^2_{\frac{1-\beta}{2}},\quad c_2 = \chi^2_{\frac{1+\beta}{2}}.$$

Неравенства $c_1 \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le c_2$ эквивалентны неравенствам $\frac{(n-1)S^2}{c_2} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{c_1}$, поэтому

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1+\beta}{2}}} < \chi^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}}}\right\} = \beta.$$

Следовательно, интервал

$$I_\beta = \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1+\beta}{2}}},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}}}\right)$$

Является доверительным интервалом дисперсии, соответствующим доверительной вероятности β.

Пример. По данным выборочного контроля найти выборочное математическое ожидание и несмещенную оценку дисперсии нормальной случайной величины ξ. Найти доверительные интервалы для них, соответствующие доверительной вероятности β=0,98.

Таблица 3.4

x_i	42	43	45	46	48	51	52	54
m_i	1	2	3	6	4	3	1	1

Решение. Выборочное математическое ожидание найдем по формуле (3.14), используя табл.3.4

При $n = 21$ $m^* = \frac{1}{21}\sum_{i=1}^{8} x_i m_i \approx 47{,}1$.

Несмещенную выборочную дисперсию вычислим по формуле (3.19):

$S^2 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{8}(x_i - 47{,}1)\cdot m_i \approx 14{,}3$, $S = 3{,}78$.

Доверительный интервал для математического ожидания определим по формуле (3.35).

При $k = n-1 = 20$ из таблицы А Приложения находим квантиль распределения

Стьюдента $t_{\frac{1+\beta}{2}} = t_{0,99} = 2{,}53$. Вычислив предельную ошибку $\Delta = 2{,}53 \cdot \frac{3{,}78}{\sqrt{21}} \approx 2{,}09$,

Получим искомый доверительный интервал для математического ожидания:

$I_\beta = (47{,}1 - 2{,}09,\ 47{,}1 + 2{,}09) = (45{,}0,\ 49{,}2)$.

Границы доверительного интервала для дисперсии определим по формуле (3.20). По таблице квантилей распределения χ2 (см. табл. С Приложения) при $k = n-1 = 20$ определим квантили:

$\chi^2_{\frac{1+\beta}{2}} = \chi^2_{0,99} = 37{,}6$, $\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}} = \chi^2_{0,01} = 8{,}3$.

Подставив эти значения, а также S и n в формулу (3.20), получим искомый доверительный интервал для дисперсии

$I_{0,98} = \left(\frac{20\cdot 14{,}3}{37{,}6},\ \frac{20\cdot 14{,}3}{8{,}3}\right) = (7{,}60,\ 34{,}5)$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется выборкой?
2. Как произвести оценку выборочного математического ожидания и выборочной дисперсии?
3. Как найти функцию распределения для дискретной случайной величины?
4. Что такое несмещенная оценка параметра?
5. Дайте определение состоятельной оценки.
6. Что такое интервальная оценка?

Тема:Интервальное оценивание вероятности события
Содержание и последовательность выполнения заданий

Вопросы для самопроверки.

1. Дайте определение нормального распределения вероятности.
2. Какой формулой задаётся плотность нормального распределения вероятности?
3. По какой формуле вычисляется вероятность случайной величины X, принадлежащей интервалу *(a;b)*?
4. Чему равна асимметрия нормального распределения?
5. Чему равна мода нормального распределения?
6. Чему равна медиана нормального распределения?
7. Чему равен эксцесс нормального распределения?

Решение задач

1. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15; 25).

2. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному при x 0 плотностью распределения f(x) = ; при x< 0 функция f(x) = 0. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (- 0,01;0,02).

3. Случайная величина X в интервале (0,5) задана плотностью распределения f(x)= x; вне этого интервала f(x)=0.Найти дисперсию X.

4. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной плотностью распределения на отрезке [0;4]: f(x) = 3, x [0;4].

5. Написать плотность вероятности нормально распределенной случайной величины X, зная, что M(X) = 2, D(X) =11.

Тема:Моделирование случайных величин.
Содержание и последовательность выполнения заданий

Задание 1. Примеры моделирования физических экспериментов.

Пример. Рассмотрим в качестве модельной характеристики рост спортсмена

Пусть рост спортсмена колеблется от 140см до 240см, тогда его статистическое выражение можно показать через определенный шаг, что образует статистический ряд. Шаг перебора, обозначим его через Δ, можно менять и получать различные статистические ряды.

Если Δx = 10см, получится статистический ряд: 140, 150, …230, 240.

Если Δy = 20см, получится статистический ряд: 140, 160, …,220, 240

После установки шага перебора и составления статистического ряда следует выявить взаимосвязи всех этих численных значениях характеристик с показателями другого ряда, например массы спортсмена, его прыжка, скорости бега т др. Таковых характеристик может быть несколько.

Практическое выполнение заданий.

Задание 1. Построить модель"Тактика спринтерского бега".Числовые характеристики: длина дистанции 100м, результат 10,6с.

Решение.

1. Дистанция делится на три части, соответствующие трем качественно различным видам бега.

S_1 – начальная часть дистанции, от старта до максимальной скорости разбега (критической скорости). Согласно эмпирическим наблюдениям начальная стадия колеблется от 42 до 62м..

S_3 – конечная часть дистанции, колеблется от 12 до 17м.

S_2 – средняя часть дистанции, колеблется от 100(62+17)=31(м) до 100(42+12)=46(м) или в общем виде S_2 =100(S_1 + S_3)

Для определенности, принимается условие, что скорость спортсмена на каждом выделенном участке равномерная. Пусть эмпирические наблюдения показали, что скорости их прохождения равны:

Участок S_1 скорость$8,9 \leq v_1 \leq 9,1$

Участок S_2 скорость$9,9 \leq v_2 \leq 10,1$

Участок S_3 скорость$10,9 \leq v_3 \leq 11,1$

Время прохождения каждой дистанции вычисляется по формуле t=S / v

2. Постоим первую микромодель:

S_1= 42м; S_3 =17м; S_2=100(42+17)=41м

v_1=8,9м/с v_3 = 10,9м/с v_2 = 9,9м/с

$t_1 = 42 : 8{,}9$ $t_3 = 17 : 10{,}9$ $t_3 = 41:9{,}9$

$T_1 = t_1 + t_2 + t_3 = 42 : 8{,}9 + 41 : 9{,}9 + 17:10{,}9 = 10{,}419$(с)

3. Строим последующие модели, используя шаг перебора $\Delta v=0{,}1$м/с по скорости для каждого участка дистанции, а затем строится модели, используя шаг перебора $\Delta S=1$м по протяженности участков дистанции. Общее число таких моделей равно 162.

4. В качестве примера приведем еще одну микромодель, изменив на один шаг скорость на третьем участке дистанции, а остальные показатели, оставив прежними.

$S_1= 42$м; $S_3 =17$м; $S_2=100(42+17)=41$м

$v_1=8{,}9$м/с $\underline{v_3 = 10{,}9 +0{,}1 =11{,}0 \text{ (м/с)}}$ $v_2 = 9{,}9$м/с

$t_1 = 42 : 8{,}9$ $t_3 = 17 : 11{,}0$ $t_3 = 41:9{,}9$

$T_2 =42:8{,}9+41:9{,}9+17:11{,}0=10{,}405$(с)

Все получившиеся микромодели имеют приближенное значения и поэтому имеют все одинаковую неточность, поэтому их можно сравнивать. В данном примере мы не будем рассматривать все модели, а укажем только на принцип их построения. Предположим, что по результатам теоретического моделирования установили, что время прохождения дистанции 100м колеблется $10{,}419 \le T \le 10{,}215$, тогда наилучший результат T=10,215с

Он достигается если:

$S_1 =42$м при $v_1=9{,}1$м/с; $S_2 =42$м при $v_2=10{,}1$м/с; $S_3 =416$м при $v_3=11{,}1$м/с.

Вывод. Теперь тренер, комбинируя длинами участков и скоростями их прохождения, может составить индивидуальный график прохождения дистанции. Наличие 162 микромодели можно расценивать как 162 способа прохождения дистанции в 100м.

Если скорость прохождения участков дистанции связать с длиной шага L(м) и частотой шагов в секунду n, то получим $v=L\cdot n$. Далее перебирая различные длины шага $0{,}6 \le L \le 1{,}4$ при различной частоте $6 \le т \le 20$, можно для каждого спортсмена разработать оптимальный вариант бега на 100м.

На первый взгляд кажется, что этот прием моделирования связан с трудоемким вычислительным процессом. Этот процесс значительно упрощается, если вычисления вести на компьютере, с применением электронных таблиц Excel

Принцип сравнения с эталоном предполагает наличие исходных статистических микромоделей, которые могут быть получены любым путем, в том числе и расчетным, например, на основе статистического перебора. При постарении модели на основе статистического перебора, микромодели сравнивались между собой для выбора оптимально варианта. В данном случае происходит сравнение реальных показателей с некоторым эталоном, на основе которого рассчитаны "идеальные" показатели или идеальные микромодели.

Задание 2. Построить модель "Старт велосипедиста"

Решение.

1. Скорость на старте у велосипедиста изменяется от нулевой скорости до некоторой индивидуальной скорости. Хотя скорость и увеличивается, но говорить что движение его равноускоренно нельзя, оно будет приближаться к равноускоренному движению, что возьмем за основу расчета стартового пути по формуле

$S=(v_t\cdot t) / 2$, где v_t – скорость спортсмена , t время прохождения пути S.

2. В качестве модельных характеристик примем величину времени старта t от 1с до 180с и величину дистанционной скорости v_t от 1 м/с до 50м/с. Конечные значения характеристик получаются эмпирическим путем и берутся максимально возможные.

Строится таблица расчетных (идеальных) стартовых участков. Величина таблицы (число строчек и столбиков) определяется согласно выбранным статистическим рядам по стартовым скоростям и по времени:

Δt=10с, получили ряд: 10,20,30,…170,180.

Δv=5м/с, получили ряд 5,10,15,…45,50

Далее ведутся вычисления, результаты которых заносятся в таблицу

$t_1=10$, $v_1=5$, $S=(5\cdot10):2=25$(м)

$t_1=10$, $v_2=10$, $S=(10\cdot10):2=50$(м) и т.д., перебирая все 180 вариантов.

$t_{10}=10$, $v_5=25$, $S=(25\cdot10):2=1225$(м)

Обобщение. При прохождении старта, берутся реальные показатели v, t, S. Рассчитывается реальный стартовый путь и сравнивается с идеальным показателем соответствующего пути. Например, пусть скорость 40м/с спортсмен достиг за 10с, показав путь 280м. Расчетный путь равен (40·10):2=200(м). Разница составляет 280200=80(м). .Реальное расстояние оказалось большим, но техника старта не соответствует расчетной. технике старта.. Тренер должен решать: хорошо это или плохо.

Превышение расчетного стартового расстояния может быть за счет увеличения скорости за меньший промежуток времени или за счет увеличения времени по набору определенной скорости. Это следует теоретически из зависимости одного компонента действия умножения от изменения другого при постоянном произведении. Зависимость здесь обратно пропорциональная.

Принцип комбинаторных сочетаний основан на том утверждении, что модельные характеристики могут сочетаться между собой разными способами, вариантами. Последовательность появления их может быть различной. Все модельные характеристик должны существовать вне зависимости наличия других характеристик. Это возможно только в ациклических (не циклических) видах. Например, в фехтовании, где одно и тоже движение может повториться несколько раз, вне зависимости от выполнения других движений. В циклических видах одни и тоже движения повторяются не однократно: бег, гребля, велосипед и др.

Принцип комбинаторных сочетаний применим только в ациклических видах. Модели строятся на основе комбинаторных задач: перестановок, размещений, сочетаний. Метод статистического перебора в ациклических видах применяется частично. Применение метода комбинаторных сочетаний требует определенной математической подготовки. табличной и графической иллюстрации. В данном курсе мы не будем его рассматривать, ограничимся лишь приведенными выше замечаниями.

Ранги.

Рангом наблюдения называется тот номер, который получит это наблюдение в упорядоченной совокупности всех данных. Упорядочить можно по некоторому закону с учет понятий об упорядочивании множества элементов. Например, от меньшего значения признака к большему значению этого признака.

Процедура перехода от совокупности наблюдений к рангам называется *ранжированием*. Полученный результат называется ранжированным рядом или ранжировкой.

Возможны два варианта ранжирования:

1. Все значения признака различные. В этом случае каждому значению присваивается номер порядка его следования. Если это спортивные или иные соревнования, то №1 – лучший результат, последний номер – худший. Это уже модель некоторого множества.

2. Среди значений есть одинаковые показатели. Они могут получиться, как при измерении величин, так и при округлении таковых значений. Совокупность одинаковых наблюдений

называется *связкой.*

В таких случаях одинаковым показателям можно присвоить один номер. Говорят при этом, что поделили то или иное место. Тогда число рангов будет меньше значений признака. Что бы этого не случилось можно ввести понятие "*средний ранг*", когда находится среднее арифметическое рангов, которые были присвоены одинаковой группе показателей.

Задание 3. Выполнить ранжирование данных

1. M={6;17;14;5:12}

Ответ представлен в таблице.

Значение признака	5	6	12	14	17
Ранг	1	2	3	4	5

2. N={6;17;6;12:12; 6}

Значение признака	6	6	6	12	12	17
Ранг	1	2	3	4	5	6

Число 6 имеет ранги 1,2,3. Средний ранг равен: (1+2+3):3 =2

Число 12 имеет ранги 4 и 5. Средний ранг равен (4+5):2=4,5

Ответ представлен в последней таблице

Значение признака	6	6	6	12	12	17
Ранг	2	2	2	4,5	4,5	6

Задание 4. С надежностью γ = 0,95 найти верхнюю границу ошибки δ, если для оценки математического ожидания нормальной величины *X*с известным средним квадратическим отклонением, равным 0,5 было разыграно 100 возможных значений X.

Решение. По условию, n=100, a = 0,5, Ф(t) = 0,95/2 = 0,475. По таблице функции Лапласа находим t = 1,96. Искомая верхняя граница ошибки б = 1,96-0,5/ $\sqrt{100}$ = 0.098.

Случай 2. Случайная величина *X*распределена нормально, причем ее среднее квадратическое отклонение σ - неизвестно, В этом случае верхняя граница ошибки с надежностью γ вычисляется по формуле:

$$\delta = t_\gamma \cdot s / \sqrt{n}$$, где:

n - число испытании;

s - исправленное среднее квадратическое отклонение,

t_γ - находят по таблице ее значений

Контрольные вопросы

1. Приведите различные трактовки понятия "Модель"
2. Может ли быть моделью действия одного человека для другого?
3. Приведите пример структурной модели.
4. Что можете сказать о воображаемых моделях?
5. Назовите особенности спортивного моделирования

2.2 Ключ для оценки практического задания

Оценивание каждого задания:

Действия	Оценка
Обучающийся выполнил задачу в полном объеме, т.е. формулы применены правильно, расчет выполнен без арифметических ошибок, сделаны правильные выводы по результатам решения задачи.	5
Обучающийся верно применил формулы, но неверно рассчитал показатели (арифметические ошибки), сделаны правильные выводы по результатам решения задачи.	4
Обучающийся не верно применил формулы, расчет выполнен без арифметических ошибок, сделаны правильные выводы по результатам решения задачи.	3
Обучающийся не верно применил формулы, расчет выполнен с арифметическими ошибками, сделаны не правильные выводы по результатам решения задачи или отсутствует решение	2

2.2.1 Вопросы для подготовки к дифференцированному зачету по дисциплине ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика для обучающихся специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование

1. Равномерно распределенная НСВ.
2. Функция плотности НСВ.
3. Интегральная функция распределения НСВ.
4. Нормальное распределение.
5. Показательное распределение
6. Центральная предельная теорема.
7. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева.
8. Понятие частоты события
9. Генеральная совокупность и выборка.
10. Сущность выборочного метода.
11. Понятие точечной оценки.
12. Понятие интервальной оценки
13. Надежность доверительного интервала
14. Точечная оценка вероятности события.
15. Моделирование сложных испытаний и их результатов.
16. Сущность метода статистических испытаний.
17. Примеры моделирования случайных величин с помощью физических экспериментов.
18. Моделирование случайных величин; моделирование случайной точки, равномерно распределённой в прямоугольнике;
19. Моделирование нормально - распределенной НСВ.
20. Моделирование показательно - распределённой НСВ.
21. Понятие интервальной оценки.
22. Сущность выборочного метода.
23. Понятие частоты события.
24. Центральная предельная теорема.

25. Показательное распределение
26. Характеристики НСВ
27. Геометрическое определение вероятности
28. Интервальная оценка вероятности события.

.

3. СПИСОК ИНФОРМАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Основные источники:

1. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. – 2-е изд., испр. и перераб. – Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2020. – 240 с. – (Среднее профессиональное образование). – ISBN 978-5-16-105582-3. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1059112.

2. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / Л.Г. Бирюкова, Г.И. Бобрик, Р.В. Сагитов [и др.]; под ред. В.И. Матвеева. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: ИНФРА-М, 2020. – 289 с. – (Среднее профессиональное образование). – ISBN 978-5-16-015712-2. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1047921.

3.Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Е.А. Коган, А.А. Юрченко. – Москва: ИНФРА-М, 2020. – 250 с. – (Среднее профессиональное образование). – ISBN 978-5-16-015649-1. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1044968.

Дополнительная литература:

1.Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и методам оптимизации: учебное пособие / А.Г. Бычков. – Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2022. – 192 с. – (Среднее профессиональное образование). – ISBN 978-5-00091-566-0. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1834678.

2. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и методам оптимизации: учеб. пособие / А.Г. Бычков. – Москва: Форум: ИНФРА-М, 2019. – 192 с. – (Среднее профессиональное образование). – ISBN 978-5-16-106570-9. – URL: https://znanium.com/catalog/product/961820.

Интернет-ресурсы: Перечень Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине, используются следующие электронные библиотечные системы (ЭБС):

1. https://znanium.com/
2. http://urait.ru//
3. https://e.lanbook.com/

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине, используются следующие профессиональные базы данных:

1. Общероссийский математический портал www.mathnet.ru
2. Матбюро: решения задач по высшей математике www.matburo.ru
3. Электронная библиотека учебных материалов www.nehudlit.ru.
4. Математический сайт http://www.math.ru/.